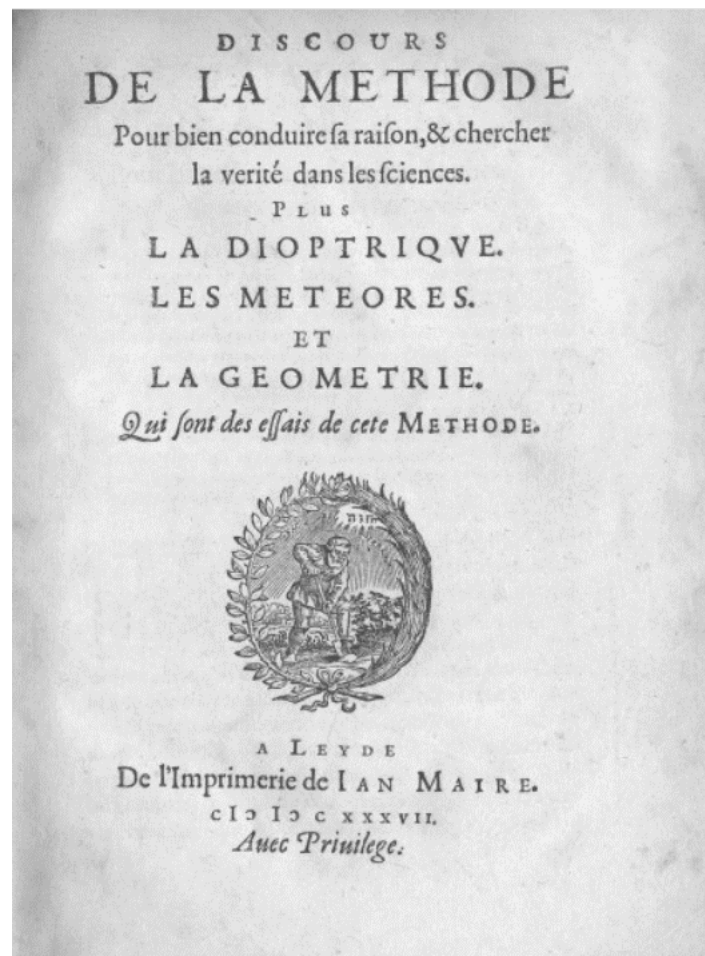


Proeven van analytische meetkunde



Fred Muijers
2023

Voorwoord

Deze tekst bevat voorbeelden, proeven, van meetkunde met gebruik van methoden uit de analytische meetkunde. Coördinaten, vergelijkingen, parameters, vectoren en afbeeldingen zijn dan de te gebruiken objecten.

Kennis van 'gewone' synthetische meetkunde is soms nodig maar de voorbeelden overstijgen de elementaire vlakke meetkundekennis zelden. Zo kan de lezer proeven aan analytische meetkunde middels redelijk eenvoudige voorbeelden om die zelf uit te werken of uit te breiden.

De proeven hebben geen volgorde wat betreft moeilijkheid: zeer eenvoudig en wat complexer, het staat allemaal door elkaar.

Tussen de proeven door staan korte A-paragrafen met een schets van de achtergrond en ontwikkeling van analytische meetkunde. De bron van die teksten is het boek *History of Analytic Geometry* van C. Boyle, een geschiedenis in, uiteraard, de interpretatie van de schrijver.

Het boek *La Géométrie* van Descartes is van belang om de ontwikkeling te kunnen plaatsen.

Verder is een goede bron het boek *Redefining geometrical exactness* van H. Bos.

De proeven zijn verzameld om als voorbeelden te dienen voor met name leraren wiskunde in opleiding. Elke proeve heeft suggesties in zich voor verder onderzoek.

Veel plezier daarmee.

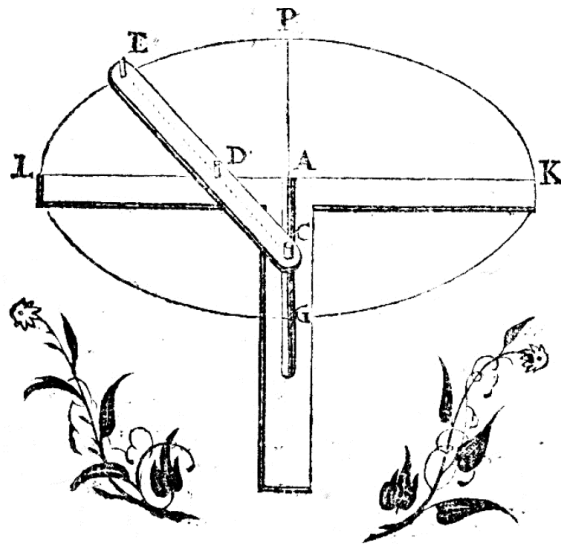
Fred Muijers
Nijmegen, juni 2023

v2

Inhoud

Voorwoord	1
A1 Ontwikkeling van analytische meetkunde 1	4
P1 Vergelijkingen als basis.....	5
P2 Vectoren, coördinaten en afbeeldingen	8
P3 Meetkundige plaatsen.....	11
P4 Wat is analytische meetkunde?	13
P5 Rechte van Euler.....	15
A2 Ontwikkeling van analytische meetkunde 2	16
P6 Rekenen aan een parabool.....	17
P7 Parabool anders bekeken	18
P8 Aanpassing voor hyperbool en ellips.....	20
P9 Parabool bij Apollonius.....	21
P10 Moderne definities van kegelsneden	22
A3 Ontwikkeling van analytische meetkunde 3	24
P11 Vergelijkingen van graad 1 en 2	25
P12 Vergelijkingen van graad 3 en 4	26
P13 Raakcirkels van Apollonius	27
P14 Trisectie en kegelsneden	29
P15 Tekeninstrumenten voor kegelsneden	30
A4 Ontwikkeling van analytische meetkunde 4	31
P16 De conchoïde van Nicomedes	32
P17 Het mesolabum van Descartes.....	34
P18 De cissoïde van Diocles.....	35
P19 Lijnenprobleem van Pappos	36
P20 Spiraal van Huygens	38
A5 Ontwikkeling van analytische meetkunde 5	39
P21 Alle parabolen zijn gelijkvormig	40
P22 Folium van Descartes	42
P23 Begin van differentiaalrekening	43
P24 Quadratrix van Hippias	44
P25 Inversie bekeken	45
A6 Ontwikkeling van analytische meetkunde 6	47
P26 Inversie van slaklijnen	48
P27 Hulp bij meetkundige puzzels	50
P28 Stangenmeetkunde	51

P29 In de ruimte	52
P30 Bézierkrommen	53
A7 Ontwikkeling van analytische meetkunde 7	54



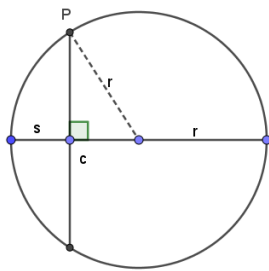
Ellipsograaf van Simon Stevin

A1 Ontwikkeling van analytische meetkunde 1¹

Meten van afstanden en lijnstukken hoort niet tot de vlakke meetkunde. Over het oude Egypte, zeg 2500 BC, is onderzoek gedaan waaruit blijkt dat men daar wel het idee van meting gebruikte. Zo waren er zogenaamde ‘touw-spanners’ die met een 3-4-5-knopentouw een rechte hoek uitzetten om gebieden af te passen. In teksten komt men een ‘formule’ tegen voor de oppervlakte van een cirkel:

$Opp(cirkel\ diameter\ d) = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 * opp(vierkant\ zijde\ d)$. Uitgewerkt geeft dat: $\pi \approx 3.16$.

Er is zelfs een soort van vergelijking gevonden voor een cirkel. Zie figuur 1.



figuur 1

Met c wordt een koorde aangegeven en met s (*sagitta*) het lijnstuk als in de figuur.

Zie P als punt van een rechthoekige driehoek, dan volgt met de stelling van Pythagoras, blijkbaar bekend vóór Pythagoras:

$$r^2 = (r - s)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Bij gegeven straal r staat hier een ‘vergelijking’ in s , horizontaal, en c , verticaal...

De volgelingen van Pythagoras, rond 500 BC, hebben nog het geloof dat er een verbinding van rekenkunde (*arithmetica*) en meetkunde (*geometrica*) mogelijk is. Voor hen geldt namelijk dat “het universum een veelvoud is van wiskundige punten die compleet onderworpen zijn aan de wetten van getallen...”.

De Griekse wiskundigen gaan, zeker na de redeneringen (paradoxen) van Zeno rond 300 BC, ervan uit dat de twee gebieden onverenigbaar zijn: meetkunde gaat over continue grootte en rekenkunde gaat over discrete (gehele) getallen. Daar ligt meteen een blokkade voor het gebruik van algebra binnen de meetkunde.

Het denken over vergelijkingen is blijkbaar gebonden aan meetkunde.

Een voorbeeld laat dat goed zien.

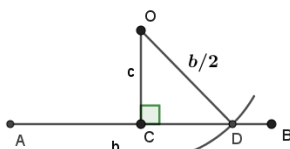
Gezocht wordt een rechthoek met één zijde gegeven (1) zodat de oppervlakte daarvan gelijk is aan een gegeven vierkant (2) en het tekort weer een vierkant (3) is geplaatst op de onbekende zijde...

Vertaald staat hier:

Gezocht een rechthoek met zijden b (1) en x heeft een oppervlakte gelijk aan c^2 (2) en x^2 (3).

Algebraïsch zouden wij dat zo noteren: zoek x met $bx = c^2 + x^2$.

Dit wordt niet algebraïsch opgelost maar de oplossing wordt geconstrueerd. Zie figuur 2.



figuur 2

C is midden van AB met $|AB| = b$, $|OC| = c$ en $OC \perp AB$.

$|OD| = \frac{b}{2}$ wordt om gecirkeld.

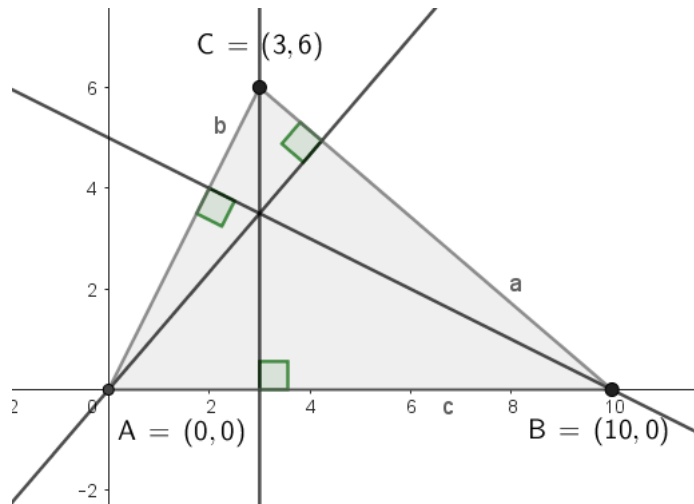
Dan geldt: $|BD| = x$. Dat is eenvoudig te bewijzen.

Wordt vervolgd.

¹ Bron: Boyer, C. (2004) *History of analytic geometry*. Dover-publications

P1 Vergelijkingen als basis

In de analytisch meetkunde spelen getallen en vergelijkingen een grote rol. Hoe met vergelijkingen wordt gewerkt is goed te zien aan een uitgewerkt voorbeeld.



figuur 1

In figuur 1 zijn drie hoogtelijnen getekend. Te bewijzen dat die drie lijnen door één punt gaan. Synthetische bewijzen zijn bekend en niet ingewikkeld maar nu is een bewijs met analytische meetkunde gevraagd. De aanpak gaat dan met hulp van vergelijkingen.

- Vergelijking van lijn a, door B en C: $6x + 7y = 60$. De richtingscoëfficiënt is $-\frac{6}{7}$.
- Vergelijking van de hoogtelijn uit A op lijn a: $y = \frac{7}{6}x$.
- Vergelijking van lijn c, door A en B: $y = 0$.
- Vergelijking van de hoogtelijn uit C op lijn c: $x = 3$.
- Het snijpunt van deze twee hoogtelijnen is $S(3, \frac{7}{2})$.
- Vergelijking van lijn b, door A en C: $y = 2x$.
- Vergelijking van de hoogtelijn uit B op lijn b: $y = -\frac{1}{2}(x - 10)$.
- S ligt op deze hoogtelijn.

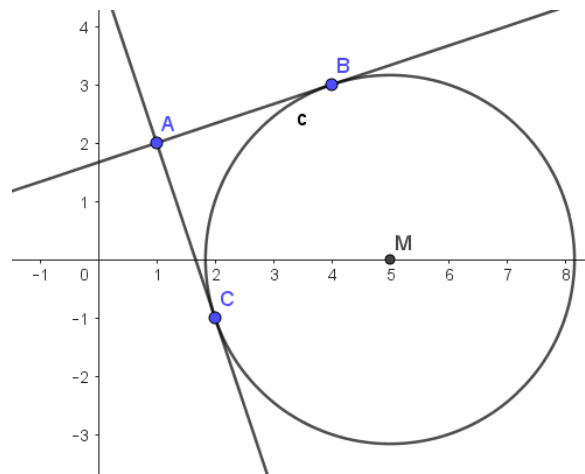
Op soortgelijke wijze is te bewijzen dat bissectrices concurrent zijn maar ook zwaartelijnen en middelloodlijnen.

Voor de bissectrice is het handig over de afstandsformule tussen punt en lijn te beschikken.

Als lijn k vergelijking $ax + by + c = 0$ heeft, dan geldt voor $P(x_1, y_1)$:

$$d(P, k) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Met cirkels gaat het op eenzelfde wijze.



figuur 2

Een voorbeeld is gegeven in figuur 2.

Gevraagd wordt nu de raaklijnen te vinden vanuit $A(1,2)$ aan de cirkel met vergelijking: $(x - 5)^2 + y^2 = 10$.

De aanpak zou nu zo kunnen zijn:

- Lijnen door punt A hebben vergelijking: $y - 2 = m(x - 1)$.
De richtingscoëfficiënt is m .
- Snijden met de cirkel geeft een vergelijking in x :
 $(x - 5)^2 + (2 + m(x - 1))^2 = 10$.
Ofwel:
 $(m^2 + 1)x^2 + (4m - 2m^2 - 10)x + 19 - 4m = 0$. [*]
- Bij een raaklijn hoort één raakpunt en dus één richtingscoëfficiënt.
Gevolg is dat de discriminant bij een oplossing van [*] gelijk nul moet zijn.
Dus: $Discr = 8(-3m^2 - 8m + 3) = 0$.
- Er volgt: $m = -3$ en $m = 1/3$.
De coördinaten van de raakpunten zijn, met $x = \frac{m^2 - 2m + 5}{m^2 + 1}$ en $y = m(x - 1) + 2$:
 $C(2, -1)$ en $B(4, 3)$.
- De raaklijnen hebben de vergelijkingen:
 $y - 2 = -3(x - 1)$ en $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$.

Dit is veel rekenwerk. Met kennis van poollijnen is het eenvoudiger te doen.

Bij een punt $P(p, q)$ en cirkel c hoort de poollijn met vergelijking: $(p - 5)(x - 5) + qy = 10$.

Bij $A(1, 2)$ hoort dus de poollijn met vergelijking: $-4(x - 5) + 2y = 10$.

Eenvoudig is te controleren dat de punten $C(2, -1)$ en $B(4, 3)$ op deze lijn liggen.

En... de poollijnen van B en C zijn tevens de raaklijnen aan c .

Dus van A eerst de poollijn vinden en dan de punt B en C geeft ook de raaklijnen.

Bijvoorbeeld geeft herschrijving van: $y - 2 = -3(x - 1)$.

Dit is de raaklijn in $C(2, -1)$ en dat wordt: $(2 - 5)(x - 5) + (-1)y = 10$.

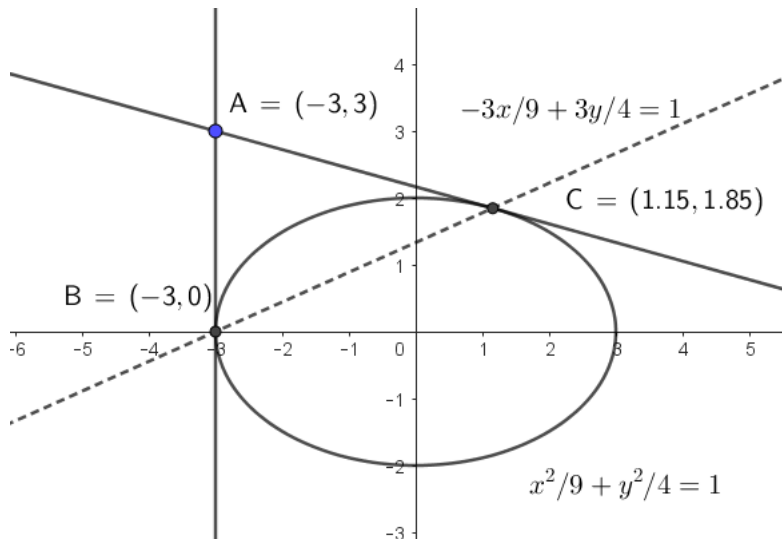
Zelfs punten binnen de cirkel hebben een poollijn met een vergelijking zoals hierboven genoemd, behalve het middelpunt van de cirkel!

Meer algemeen:

De poollijn van punt $P(p, q)$ bij de cirkel met vergelijking: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ heeft de vergelijking: $(x - a)(p - a) + (y - b)(q - b) = r^2$.

Voor ellipsen en hyperbolen met assen evenwijdig aan de x-y-assen geldt dit net zo.

Voorbeeld in figuur 3.



figuur 3

Bij de parabool gaat het iets anders.

Voorbeeld:

Gevraagd is de poollijn van punt $A(3,0)$ bij de parabool met vergelijking $y = x^2$.

- Lijnen door A hebben vergelijking $y = m(x - 3)$.
- Snijden met de parabool geeft de vergelijking: $x^2 - mx + 3m = 0$.
- Eén raakpunt bij één richtingscoëfficiënt dus: $Discr = m^2 - 12m = 0$.
- Dit geeft de twee raaklijnen: $y = 0$ en $y = 12(x - 3)$.
- De raakpunten zijn dan $B(0,0)$ en $C(6,36)$.
- De lijn door B en C is de poollijn van A met vergelijking: $y = 6x$.

Bij dit type parabool ($y = tx^2$) is de vergelijking van de poollijn van een punt $P(p, q)$ als volgt te vinden door 'eerlijk verdelen':

$$y = tx^2 \rightarrow 2y = 2tx^2 \rightarrow y + y = 2txx \rightarrow y + q = 2tpx. [**]$$

En voor $A(3,0)$ geeft dat inderdaad: $y = 6x$.

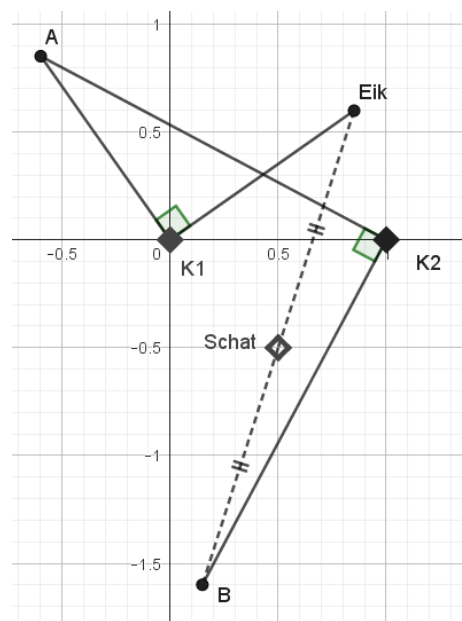
De algemene afleiding van [**] is uiteraard bewerkelijker dan in het voorbeeld.

P2 Vectoren, coördinaten en afbeeldingen

Een leuk probleem is het volgende en voor een schets van de situatie, zie figuur 1.

Op een eiland is een schat te vinden via de volgende aanwijzingen: loop in een rechte lijn van de oude eik naar de grote zwerfkei. Leg nu loodrecht (draai rechtsom) op de vorige richting eenzelfde afstand af. Loop vervolgens in een rechte lijn naar de tweede grote zwerfkei die op het eiland te vinden is. Leg vervolgens weer de laatste afstand af in de richting loodrecht (draai rechtsom) op het laatst afgelegde stuk. De schat ligt precies in het midden van het lijnstuk tussen het punt dat je net bereikt hebt en de oude eik.

Echter: bij het op zoek gaan naar de schat blijkt dat er op het hele eiland geen eik meer te vinden is. Alleen de twee grote zwerfkeien zijn er nog. Toch kan met slechts één keer graven de schat gevonden worden. Hoe dan?



figuur 1

Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we hierbij een assenstelsel gebruiken met kei 1 (K1) in het punt met coördinaten $(0,0)$ en kei 2 (K2) in het punt met coördinaten $(1,0)$.

- We geven de plaats van de Eik aan met $E(p, q)$ en de schat ligt in punt S.
- Dan volgt: $D_{K1,90^\circ} : E(p, q) \rightarrow A(-q, p)$. Gebruik [*]
- En: $D_{K2,90^\circ} : A(-q, p) \rightarrow B(1-p, -(1+q))$. Gebruik $T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ D \circ T_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$
- Er volgt: $S\left(\frac{1}{2}(p+1-p), \frac{1}{2}(q-(1+q))\right) = S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
- De coördinaten van S zijn onafhankelijk van p en q.
Dus waar de schat ligt is nu bekend.

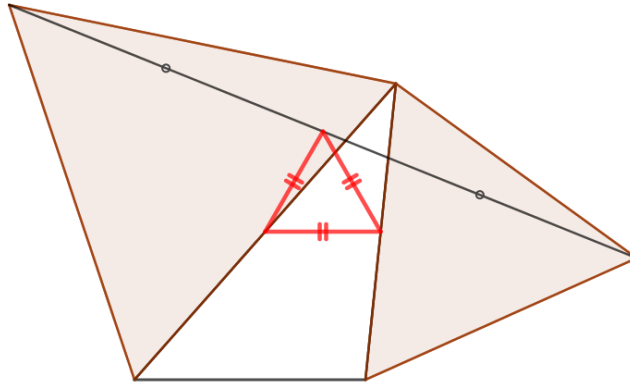
$$[*] D_{O,90^\circ} = D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en i.h.a.: } D_{O,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Twee rotaties om 90° geven netto een puntvermenigvuldiging: $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Het opsporen van het centrum is eenvoudig: volg een willekeurig punt. Het centrum is het midden van punt en beeldpunt.

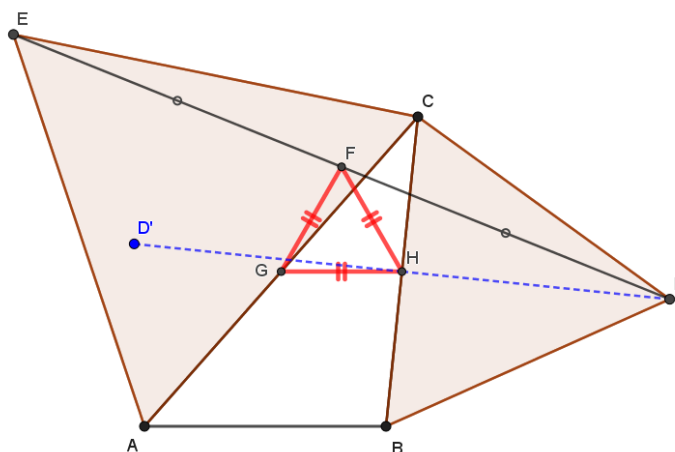
Overigens is dit alles met *Geogebra* goed zichtbaar te maken.

Een aanpak met methoden uit de analytische meetkunde, in dit geval afbeeldingen, kan soms makkelijker zijn dan met synthetische meetkunde. Zie het vorige voorbeeld maar ook de onderstaande *sangaku*.²



figuur 2a

Met toevoeging van labels voor de hoekpunten...



figuur 2b

$\triangle ACE$ en $\triangle BDC$ zijn gelijkzijdig en F, G en H zijn middens.

Er is hier te bewijzen: $\triangle FGH$ is gelijkzijdig.

Bewijs:

Bekijk afbeelding $k = F_C, \frac{1}{2}$ o $D_C, 60^\circ$ o $F_{D,2}$ en volg punt F.

$k: F \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow G$.

k is een congruentieafbeelding (factor=1) met draaihoek dus $k = D_{X,60^\circ}$.

Volg nu punt H.

$k: H \rightarrow D' \rightarrow B \rightarrow H$. D' is de gespiegelde van D in BC.

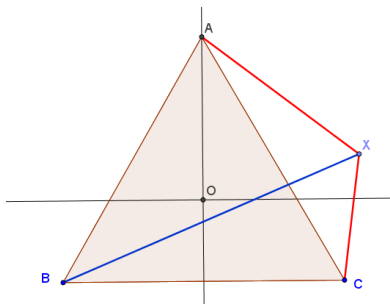
Blijkbaar is H invariant onder k dus $X=H$ en dus geldt: $|HG| = |HF|$ en $\angle GHF = 60^\circ$.

Gevolg: $\triangle FGH$ is gelijkbenig met een tophoek van 60° dus gelijkzijdig.

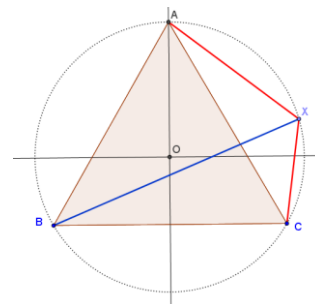
Klaar.

² Zie: Muijers, F. (2022). *Bundel sangaku-voorbeelden*. Eigen uitgave.

Niet altijd is een aanpak met bijvoorbeeld coördinaten handig en volgt er een rekenpartij. Een voorbeeld weer uit de bundel met sangaku-voorbeelden, zie figuur 3.



figuur 3a



figuur 3b

Te bewijzen: $|BX| = |AX| + |CX|$ dan en slechts dan als punt X op de omgeschreven cirkel van de gelijkzijdige driehoek ABC ligt. $\{P \Leftrightarrow Q\}$

Met de stelling van Ptolemeus (87- ca.150 AD) is het bewijs eenvoudig.

Invoering van coördinaten vraagt nogal wat rekenwerk. Dat is te illustreren voor de bewering $P \Rightarrow Q$. Wat is de meetkundige plaats van de punten X?

De eerste keuzen zijn meteen handig te doen:

$A(0,1)$, $B(-p, q)$, $C(p, q)$ en O het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

Met hulp van een computeralgebrasysteem (CAS) voor de rekenarij is dit net te doen.

- $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $q = -\frac{1}{2}$;
- $|BX| = |AX| + |CX|$ en $X(a, b)$;
- Met de Pythagoreïsche afstandsregel volgt:

$$\sqrt{((a+p)^2 + (b-q)^2)} = \sqrt{(a^2 + (b-1)^2)} + \sqrt{((a-p)^2 + (b-q)^2)}$$
- Substitueer waarden voor p en q (zie regel 1) en kwadrateer vervolgens;
- Linkerlid wordt: $a^2 + \sqrt{3} \cdot a + b^2 + b + 1$;
- Rechterlid: $2\sqrt{(a^2 + (b-1)^2)(a^2 - \sqrt{3} \cdot a + b^2 + b + 1)} + (2a^2 - \sqrt{3} \cdot a + 2b^2 - b + 2)$;
- Uitdrukking met wortel even apart zetten, de uitdrukking zonder wortel aftrekken van het linkerlid en vervolgens kwadrateren;
- Rechterlid: $2\sqrt{(a^2 + (b-1)^2)(a^2 - \sqrt{3} \cdot a + b^2 + b + 1)}$ wordt dan:

$$4a^4 - 4\sqrt{3} \cdot a^3 + 8a^2b^2 - 4a^2b + 8a^2 - 4\sqrt{3} \cdot ab^2 + 8\sqrt{3} \cdot ab - 4\sqrt{3} \cdot a + 4b^4 - 4b^3 - 4b + 4$$
- Linkerlid: $a^2 + \sqrt{3} \cdot a + b^2 + b + 1 - (2a^2 - \sqrt{3} \cdot a + 2b^2 - b + 2)$ wordt dan:

$$a^4 - 4\sqrt{3} \cdot a^3 + 2a^2b^2 - 4a^2b + 14a^2 - 4\sqrt{3} \cdot ab^2 + 8\sqrt{3} \cdot ab - 4\sqrt{3} \cdot a + b^4 - 4b^3 + 6b^2 - 4b + 1$$
- Resultaten van regel 8 en 9 zijn gelijk dus verschil is gelijk aan nul.
 Dat geeft: $3a^4 - 6a^2 + 6a^2b^2 + 3b^4 - 6b^2 + 3 = 0$;
- Dit blijkt mooi te herschrijven:

$$3(a^2 + b^2 - 1)^2 = 0$$
 en er volgt: $a^2 + b^2 - 1 = 0$.

En op basis van regel 11 volgt nu: X ligt op de cirkel met vergelijking: $x^2 + y^2 = 1$.

Dit is de omgeschreven cirkel van de startdriehoek.

De bewering $\{Q \Rightarrow P\}$ is op soortgelijke wijze te doen.

P3 Meetkundige plaatsen

Goed bruikbaar is de aanpak met methoden uit de analytische meetkunde als er een verzameling van punten of lijnen gezocht wordt die aan een bepaalde eigenschap moeten voldoen bij variatie van de startobjecten.

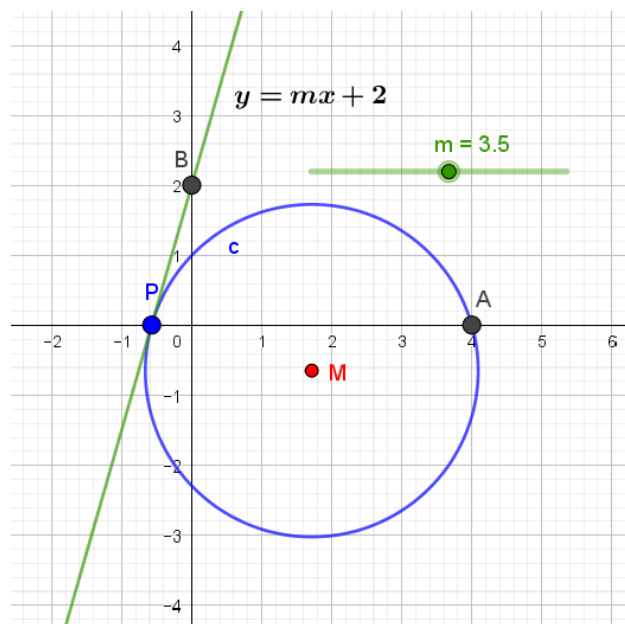
Een voorbeeld:

Gegeven: Punten $A(4,0)$ en $B(0,2)$. Lijn n door B snijdt de x -as in P .

Er is een cirkel door A die raakt aan n in P . Noem het middelpunt van die cirkel M .

Bepaal de meetkundige plaats van M als de lijn n 'draait' om B , maar wel door B gaat. Zie de figuur, waarin één situatie is getekend.

De vraag wordt nu: Bepaal de meetkundige plaats van M als m , de richtingscoëfficiënt van de lijn door B , varieert. Zie figuur 1.



figuur 1

Dit is een typisch analytisch meetkundig vraagstuk.

Aanpak en oplossing:

De algemene vergelijking van een lijn n door B is: $y = mx + 2$.

Richtingscoëfficiënt m is een zogenaamde parameter die varieert in waarde.

Dat geeft $P(-\frac{2}{m}, 0)$. BP is een raaklijn dus M ligt op de loodlijn op n in P .

Dat geeft een lijn met vergelijking $y = -\frac{1}{m}(x + \frac{2}{m})$. (1)

M ligt ook op de middelloodlijn van AP dus op de lijn met vergelijking $x = \frac{1}{2}(4 - \frac{2}{m})$. (2)

M heeft coördinaten (p, q) en die voldoen aan (1) en (2).

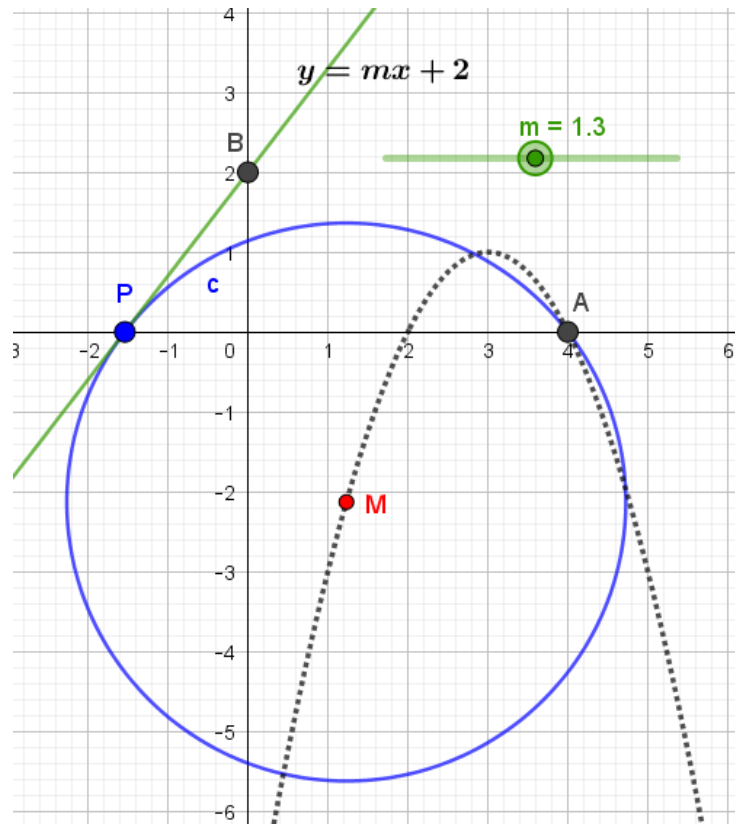
Eliminatie van de parameter m geeft een vergelijking in p en q .

Uit (2) volgt $\frac{1}{m} = 2 - p$ en dit ingevuld in (1) geeft: $q = (p - 2)(4 - p)$.

Blijkbaar ligt M op een bergparabool met vergelijking $y = -x^2 + 6x - 8$.

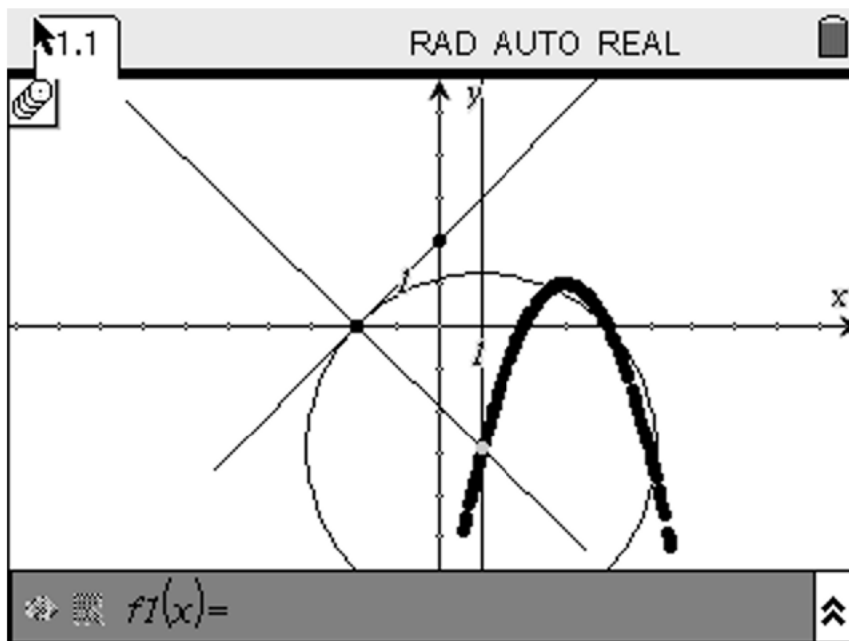
De kromme noemen we de meetkundige plaats van de punten M . (Eng. *locus*).

Hier leent een dynamisch meetkundeprogramma zich uitstekend om dit zichtbaar te maken. Zie de volgende figuren 2ab.



figuur 2a

Geogebra

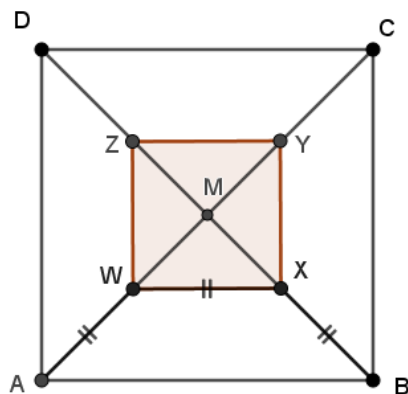


figuur 2b

Ti-Nspire

P4 Wat is analytische meetkunde?

Om het onderscheid met bekende andere aanpakken te zien, nemen we een voorbeeld.

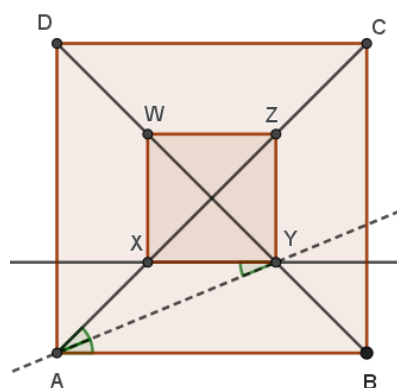


figuur 1

Gegeven is een vierkant ABCD en gevraagd is een vierkant te construeren met hoekpunten WXYZ op de diagonalen van ABCD én zodanig dat $|AW| = |WX| = |BX|$. Zie figuur 1.

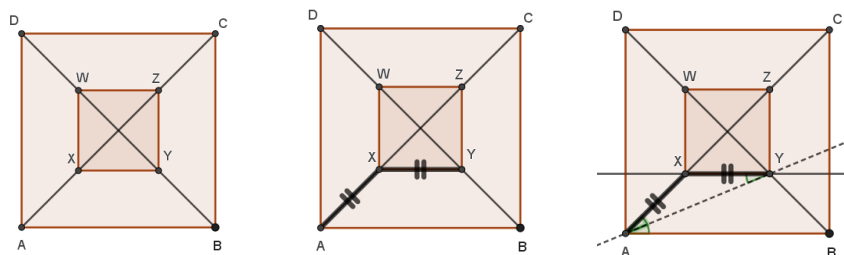
Een aanpak met synthetische meetkunde gaat middels constructie en wordt gevolgd door een bewijs.

In de analysefiguur 2a zien we Z-hoeken en driehoek $\triangle AXY$ is gelijkbenig.
 Gevolg: AY een bissectrice...
 Punt Y is dus te construeren en daarmee het vierkantje.³
 De middelloodlijn van AY geeft X en $|AX| = |XY|$. Etc.



figuur 2a

Een aanpak op analytische wijze zoals Pappos (rond 320 AD) het doet gaat als volgt:



$\triangle AXY$ is gelijkbenig.
 Dus er ontstaan Z-hoeken.
 De stippellijn is dus een bissectrice.

figuur 2b

Doe alsof het probleem is opgelost. Zet dan de gegevens erbij en werk zo achteruit. Ook daarna volgt constructie en bewijs.

³ Bron: PPT *Wat is Analytische Meetkunde?* (2010). cTWO, fi UU.

De aanpak analytisch-algebraïsch van Descartes:

Doe alsof het probleem is opgelost en benoem lijnstukken.

Noem a de lengte van zijde AB, $x = |AX|$ en $y = d(X, AB) = d(X, AD)$.

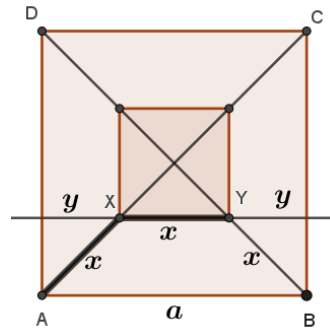
Er volgt: $a = x + 2y$ en $x^2 = 2y^2$.

Uitwerking geeft x uitgedrukt in a :

$$x^2 + 2ax - a^2 = 0.$$

Constructie volgt nu op basis van de formule:

$$x = a\sqrt{2} - a.$$



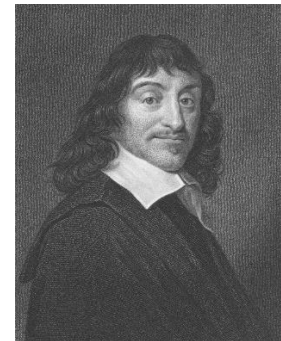
figuur 2c

Descartes hanteert die laatste aanpak, beschreven en toegepast in *La Géométrie* (1637)⁴:

- Elk vraagstuk dat over grootheden gaat kan worden teruggebracht tot een meetkundig probleem;
- Elk meetkundig probleem kan worden teruggebracht tot een algebraïsch probleem;
- Elk algebraïsch probleem kan worden teruggebracht tot het oplossen van één of meer vergelijkingen met één of meer onbekenden.

Hoe die aanpak verloopt is niet helder omschreven maar er is wel een soort heuristiek uit te lezen hoe Descartes meent altijd(!) tot oplossingen te komen. De aanpak in *La Géométrie* is een toepassing van zijn 'methode'. Daarin staan regels die erg algemeen zijn. Overigens formuleerde Descartes eerst meer regels waarvan onderstaande vier zijn overgebleven.

1. Neem alleen aan wat helder is.
(regel van evidentie; vergelijk de postulaten bij Euclides);
2. Deel het probleem op in stukken voor zover nodig voor de juiste oplossing.
(regel van de analyse);
3. Begin met de meest eenvoudige dingen en zo opstijgend naar de ingewikkelde zaken.
(regel van ordening; vergelijk de methode bij Euclides);
4. Maak een overzicht en som afzonderlijke redeneerstappen volledig op.
(... zodat ik zeker ben niets te vergeten...)



René Descartes of gelatiniseerd Renatus Cartesius

(La Haye en Touraine, 31 maart 1596 – Stockholm, 11 februari 1650)

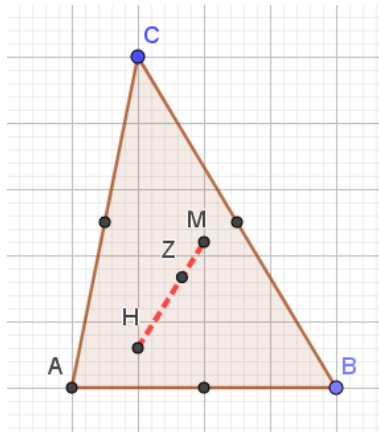
Foto van gravure uit 1850. Bron: Volkskrant 5-5-2022; Beeld Getty.

⁴ In vertaling: Wilhelm, W (2009). *René Descartes; Meetkunde*. Eburon Delft.

P5 Rechte van Euler

Met een aanpak zoals voorgaand zijn mooie stellingen te bewijzen zoals: zwaartepunt (Z), hoogtepunt (H) en middelpunt (M) omgeschreven cirkel van een driehoek ABC liggen op één lijn, de zogenaamde rechte van Euler (1707-1783).

Zonder de algemeenheid te schaden zijn de coördinaten van de hoekpunten handig te kiezen: $A(a, 0)$; $B(b, 0)$; $C(0, c)$.



figuur 1

Uitwerking geeft:

Als D het midden is van AB, dan geldt voor Z, het zwaartepunt: $|CZ| : |ZD| = 2 : 1$.

$$\text{Dus } Z = \frac{2}{3} \left(\frac{a+b}{2}, 0 \right) + \frac{1}{3} (0, c) = \left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3} \right).$$

De middelloodlijn van BC heeft de vergelijking $y - \frac{c}{2} = \frac{b}{c} \left(x - \frac{b}{2} \right)$.

M vinden we door snijding met de middelloodlijn van AB ($x = \frac{a+b}{2}$).

$$\text{Dat geeft } M \left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{2c} + \frac{c}{2} \right).$$

$$\text{De lijn door H en Z heeft vergelijking: } y + \frac{ab}{c} = \frac{\frac{c}{3} + \frac{ab}{c}}{\frac{a+b}{3}} x = \frac{c + \frac{3ab}{c}}{a+b} x.$$

Na invulling van de coördinaten van M blijkt dat M op deze lijn ligt.

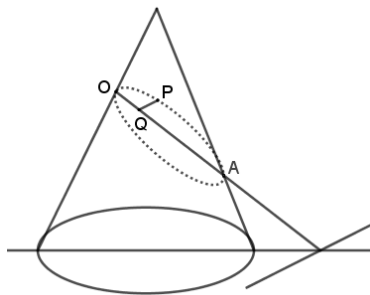
Merk op: de verschillen van de x-coördinaten van H, Z en M verhouden zich als

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2 : 1. \text{ Blijkbaar geldt: } |HZ| : |ZM| = 2 : 1.$$

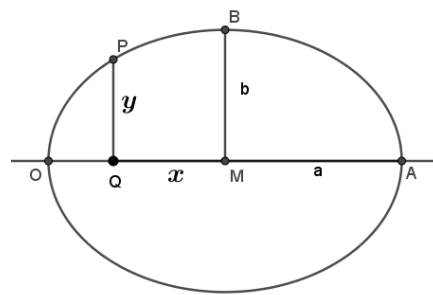
Het middelpunt van de 9-punts cirkel van Feuerbach ligt ook op deze lijn. De negen punten zijn de middens van de zijden, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de lijnstukken AZ, BZ en CZ.

A2 Ontwikkeling van analytische meetkunde 2

In de periode rond 300 BC, de tijd van Archimedes, Euclides en Apollonius, worden veel krommen bestudeerd en niet alleen lijnen en cirkels. In de *Elementen* zijn boeken gewijd aan de (on-)meetbaarheid van lengtes ofwel er is geen verhouding van gehele getallen die bij zo'n lengte hoort. Apollonius schrijft, deels verloren gegane, werken over kegelsneden. In die werken lijken al voorbodes te staan van vergelijkingen in de zin van analytische meetkunde. X- en y-as komen niet voor maar er zijn wel referentielijnen gekozen om een kromme te duiden. Met een voorbeeld wordt dat duidelijk. Zie de figuren 1 en 2.



figuur 1



figuur 2

De referentielijn is hier de as van de ellips. M is het midden van die as. Op die as staat te Q een lijn loodrecht die de kegelsnede snijdt in punt P.

Apollonius noteert:

$$\frac{PQ^2}{MB^2} = \frac{OQ * QA}{OM * MA}$$

Wij zouden dit lezen als in figuur 2: (NB: de kleine letters zijn NIET van Apollonius)

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{a^2} \text{ ofwel: } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ en dat is een moderne notatie.}$$

Overigens worden coördinaten zoals hier in de moderne notatie pas vrij laat ingevoerd. In de ontwikkeling van dat idee zijn min of meer drie stadia aan te geven:

1. Introductie van twee assen in het vlak (eventueel drie bij ruimtelijke meetkunde)
2. Plotten van een kromme door punten (ordinaten) middels lengtes te construeren en dan die punten te verbinden
3. Gebruik van vergelijkingen om tussen die ordinaten heen en weer te kunnen gaan.

Maar zover zijn we nog niet.

In de middeleeuwen zijn hier weinig ontwikkelingen te zien maar wel veel algebra met betrekkingen tot het oplossen van vergelijkingen en algoritmen daarvoor.

Dat gebeurt overigens met name in de Arabische wereld.

Wordt vervolgd.

P6 Rekenen aan een parabool

Een parabool is meestal gedefinieerd als de meetkundige plaats van punten die op gelijke afstand liggen van een vast gegeven punt, brandpunt F , en een vast gegeven lijn, richtlijn k .

Voor de parabool met vergelijking $y = px^2$ zijn F en k eenvoudig terug te vinden.

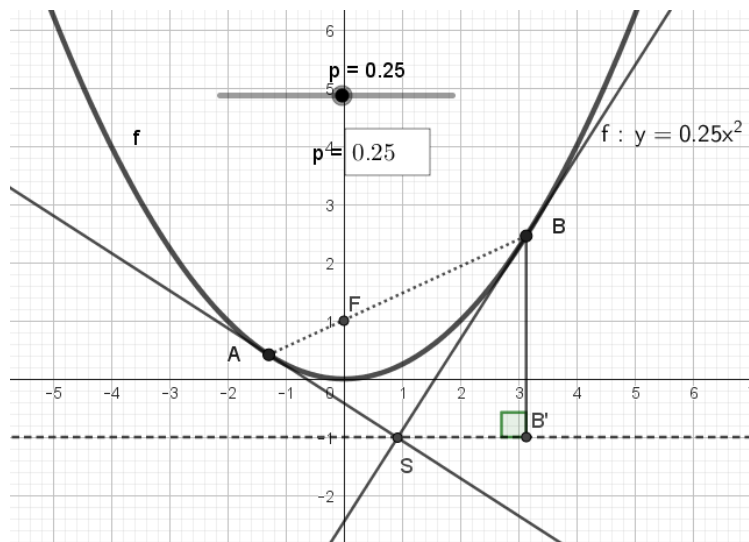
Met $O(0,0)$ gelegen op die parabool volgt voor zekere t -waarde:

$F(0, t)$ en vergelijking van k : $y = -t$.

Dus voor een punt $P(a, pa^2)$ op die parabool gelegen volgt nu:

$$\sqrt{(a^2 + (pa^2 - t)^2)} = pa^2 + t.$$

Hieruit volgt: $t = \frac{1}{4p}$.



figuur 1

In de figuur is een p -waarde gekozen.

Met $A(a, pa^2)$ en $B(b, pb^2)$ hebben de raaklijnen de vergelijkingen:

$$y = 2pax - pa^2 \text{ resp. } y = 2pbx - pb^2.$$

Het snijpunt S van deze twee raaklijnen heeft als x -coördinaat: $\frac{1}{2}(a + b)$. Onafhankelijk van p !

Veronderstel nu dat de raaklijnen bovendien loodrecht op elkaar staan.

Dan geldt: $4p^2ab = -1$.

Uitwerking geeft voor de y -coördinaat van S : $pab = -\frac{1}{4p}$. [*].

Blijkbaar ligt S op de richtlijn van deze parabool!

De verbindingslijn AB heeft vergelijking: $y = px(a + b) - pab$.

De y -as wordt gesneden in een punt met coördinaten, met gebruik van [*]: $(0, \frac{1}{4p})$ dus in F .

Figuur 1 laat dat ook mooi zien.

Eenvoudig is aan te tonen in het algemene geval:

Als $B'(b, -\frac{1}{4p})$ op de richtlijn ligt, dan geldt dat de raaklijn in B de middelloodlijn is van lijnstuk $B'F$.

P7 Parabool anders bekeken

Ten tijde van Euclides (ca 325-265 BC) wordt veel gewerkt met de zogenaamde aanpassingstheorie.

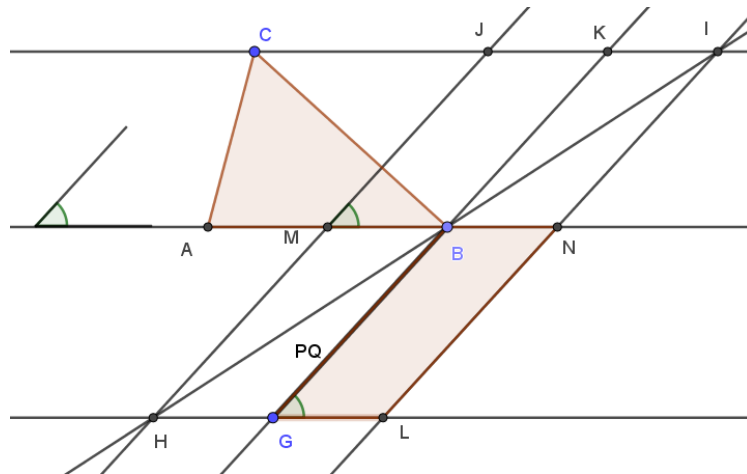
Zie bijvoorbeeld de proposities 42 en 44 van boek 1 van *de Elementen* van Euclides:

Gegeven is een driehoek ABC, een hoek α en een lijnstuk PQ.

Gevraagd wordt een parallellogram I te construeren met die hoek en van gelijke oppervlakte.

Gevraagd wordt een parallellogram II te construeren met één zijde PQ en van gelijke oppervlakte.

In de figuur 1 is dit alles bij elkaar gezet.



figuur 1

- Driehoek ABC, hoek en lijnstuk is gegeven;
- M midden van AB;
- Met evenwijdige lijnen volgt: parallellogram BMJK heeft gelijke oppervlakte en hoek α . Dit is de eerste aanpassing en dit parallellogram is het eerste gevraagde;
- Via parallellogram HLIJ met hulp van diagonaal HB ontstaat parallellogram BGLN. Dit is de tweede aanpassing en dit parallellogram is het tweede gevraagde.

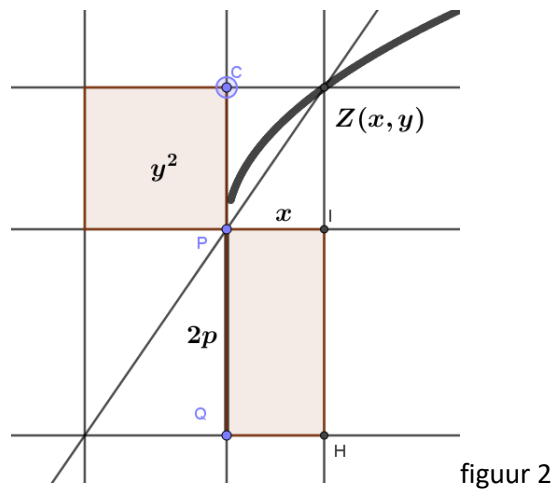
Merk op: hier wordt gebruikt dat een diagonaal een parallellogram in stukken met gelijke oppervlakte verdeelt.

Euclides geeft dit proces van aanpassing de naam *parabolè* (= gelijkheid/-zijn).

Aanpassingen kunnen ook zijn:

een driehoek naar een rechthoek, een parallellogram naar een driehoek met gegeven basis, etc. In het volgende gedeelte gaat het over aanpassing van een rechthoek naar een vierkant.

Een aanpassing van een rechthoek met een zijde PQ en een oppervlakte gelijk aan een vierkant is in figuur 2 te zien.



Met $|PQ| = 2p$ is af te lezen: $y^2 = 2px$. Door variatie van C, dus variatie van het vierkant, wordt steeds een punt $Z(x, y)$ bepaald: een parabooltak ontstaat.

Het getal p is de parameter van de parabool.

Dit geeft de klassieke topvergelijking van een parabool zoals Descartes die in zijn *Géometrie* opneemt. Feitelijk is hier de y -waarde de onafhankelijke variabele en de x -waarde de afhankelijke variabele. De moderne notatie is soortgelijk met aanpassing te begrijpen.

Het oplossen van een kwadratische vergelijking wordt ook gezien als een proces van aanpassing.

Een voorbeeld:

Gevraagd wordt de lengte (x) van een zijde van een rechthoek waarvan de andere zijde 2 langer is en die oppervlakte 3 heeft. In vergelijkingstaal: $x(x + 2) = 3$.

Zie figuur 3 voor begrip van de bedoelde aanpassing.

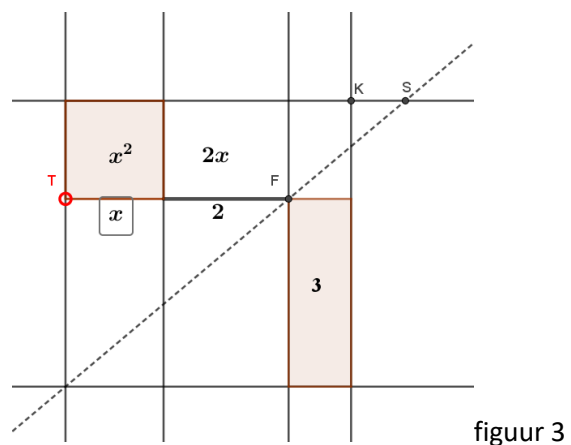
Door variatie van T wijzigt x .

Gezocht wordt een punt T waarbij het punt S op de gestippelde diagonaal samenvalt met punt K.

Dan geldt volgens de aanpassing:

$$x^2 + 2x = 3.$$

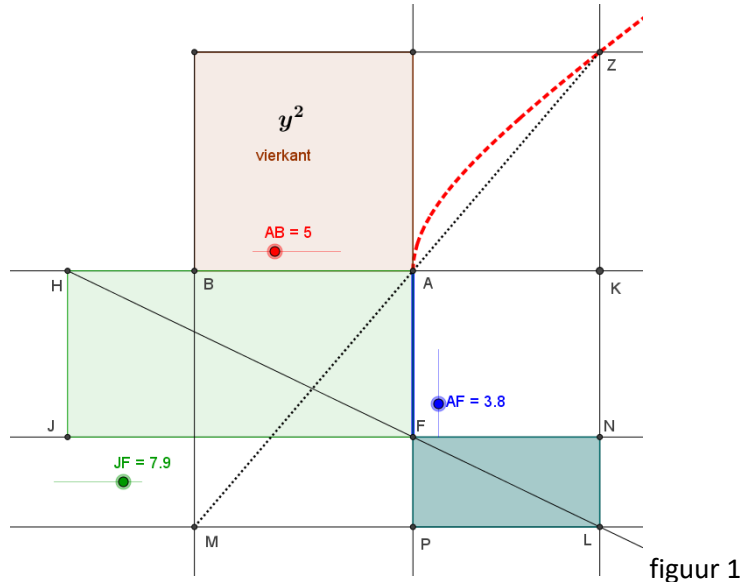
Met deze voorstelling gaat het om lengtes, dus altijd geldt: $x > 0$.



Soortgelijk gaan vergelijkingen als $x(x - 3) = 4$.

P8 Aanpassing voor hyperbool en ellips

Ook hyperbool en ellips zijn te formuleren als de meetkundige plaats van punten die bij een heel specifieke aanpassing horen. Zie figuur 1 voor de volgende aanpassing:



Met $|AF| = 2p$ en $|JF| = 2a$.

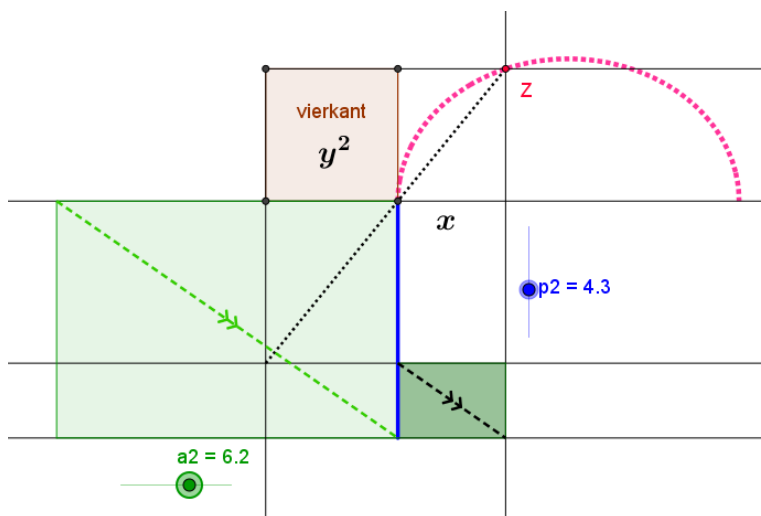
Rechthoek APLK is aangepast aan de gegeven zijde AF met een oppervlakte gelijk aan het gegeven vierkant, maar zodanig dat één zijde AP langer is dan $2p$. Er geldt verder dat het ontstane overschot (*hyperbolé*) dat wil zeggen de rechthoek FPLN gelijkvormig is met rechthoek AHJF.

Noem nu $Z(x, y)$ dus met $|AK| = x$ dan volgt:

$|FP| : |FN| = |AF| : |JF| = p : a$. Er geldt nu: $|FP| = \frac{p}{a} x$.

Samenvoegend volgt nu: $y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$. En dit is de vergelijking van een hyperbool.

Analoog gaat dat voor een ellips. Nu is de rechthoek aangepast aan een gegeven vierkant maar één zijde is korter. Er ontstaat een tekort (*ellipsein*). Zie figuur 2.



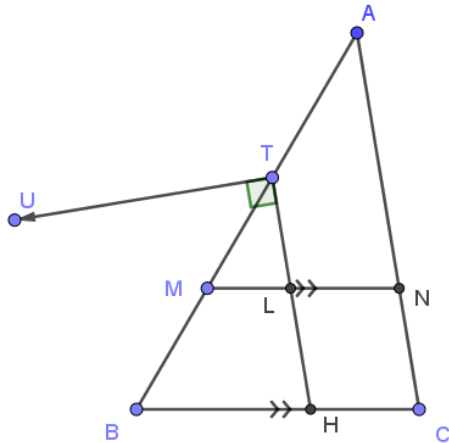
figuur 2

Er volgt nu: $y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$. En dit is de vergelijking van een ellips.

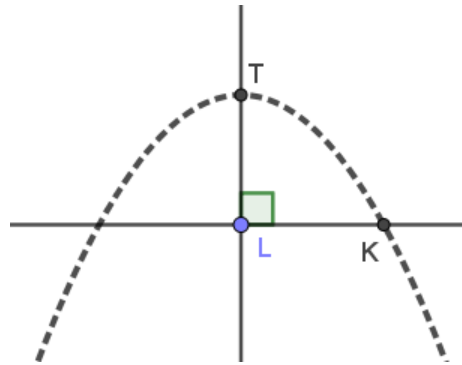
P9 Parabool bij Apollonius

Apollonius analyseert kegelsneden en de analyse hierna laat zien hoe hij feitelijk op hetzelfde begrip van parabool komt zoals dat met de aanpassingstheorie gaat.

In de figuur 1 is het zijaanzicht van een doorsnede van een scheve kegel (ABC) met een vlak: lijn TH is evenwijdig aan de beschrijvende AC. Het grondvlak van de kegel is een cirkel.



figuur 1



figuur 2

In de figuur is af te lezen:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{NA} = \frac{ML}{TL}. \text{ En ook: } \frac{BC}{BA} = \frac{MN}{MA} = \frac{ML}{MT} = \frac{LN}{TA}.$$

$$\text{Er volgt: } \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = \frac{ML}{TL} \cdot \frac{LN}{TA}.$$

In figuur 2 is TL de as en LK staat hier loodrecht op met K op de kegelsnede. K ligt dus zowel in het doorsnedevlak als in het vlak van MN. De doorsnede van dat vlak met de kegel is een cirkel want dat vlak is evenwijdig aan het grondvlak met BC als middellijn.

LK staat dus ook loodrecht op MN en er volgt:

$$ML \cdot LN = KL^2. \text{ Lijnstuk KL is het meetkundig evenredige/ gemiddelde van ML en LN.}$$

$$\text{Dus: } KL^2 = \left(\frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot TA \right) \cdot TL = TU \cdot TL.$$

De uitdrukking tussen haakjes stelt een lengte TU voor...

In feite staat hier dus met $|KL| = y$ en $|TL| = x$ en $|TU| = 2p$:

$$y^2 = 2px. \text{ De vergelijking van een parabool.}$$

Soortgelijk is de doorsnijding van een kegel met scheve vlakken te analyseren en dat leidt dan naar hyperbolen en ellipsen.

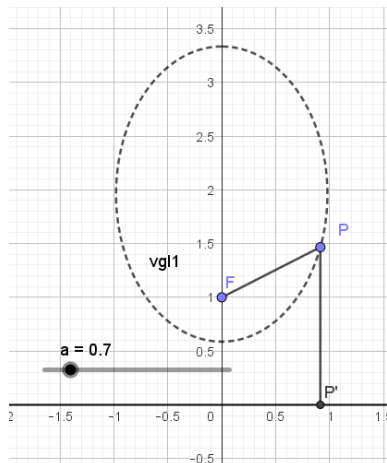
P10 Moderne definities van kegelsneden

De definitie van parabool gebuikt een brandpunt en een richtlijn. Bij een hyperbool en een ellips zijn ook een brandpunt en richtlijn te gebruiken.

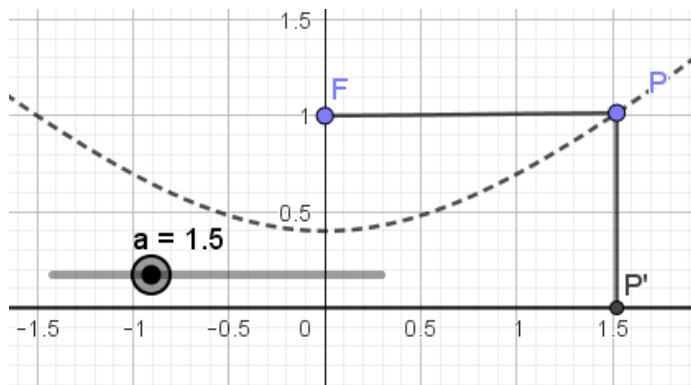
Bij brandpunt F en richtlijn m definiëren we voor een punt P op de parabool:

$$d(P, F) = a \cdot d(P, m) \text{ met } a = 1.$$

Met variatie van a krijgen we andere kegelsneden. Met een specifieke keuze van F en m horen de volgende vergelijkingen bij de figuren zijn: $a \cdot y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$

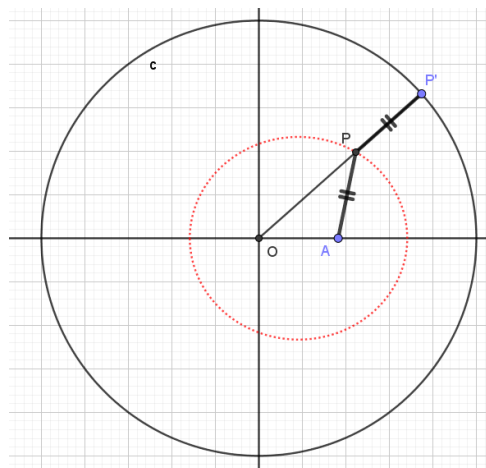


figuur 1



figuur 2

De definitie met som/verschil van afstanden tussen twee brandpunten voor ellips/hyperbool is bekend. Soms wordt een richtcirkel gebruikt.



figuur 3

Punt A en cirkel c zijn gegeven. Voor P geldt: $d(P, A) = d(P, c)$.

In figuur 3 is een ellips te zien en met A buiten cirkel c gelegen ontstaat een hyperbool. Het bewijs gaat eenvoudig met de som/verschil definitie. A en O zijn dan de brandpunten. De ontstane kegelsnede heet ook wel de conflictlijn van punt A en cirkel c .

Bijzonder is de aanpak enkel met lijnen.

Gegeven zijn twee punten A en B en in elk punt een lijnenbundel: b1 respectievelijk b2.

Bij elke lijn p uit b1 wordt een lijn q uit b2 gekozen zodat geldt:

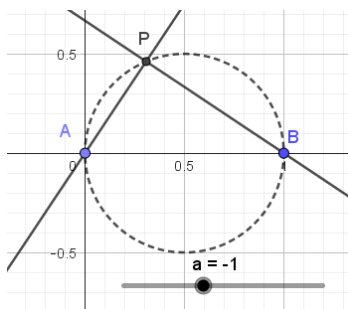
$$\text{rico}(p) \cdot \text{rico}(q) = \text{constant}.$$

Het snijpunt van p en q (P) ligt nu op een kegelsnede.

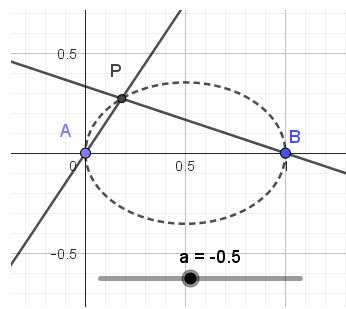
Bekend is natuurlijk dat als $p \perp q$ de punten P op een cirkel liggen (Thales, ca. 500 BC).

In de figuren 4abc zijn enige situaties getekend.

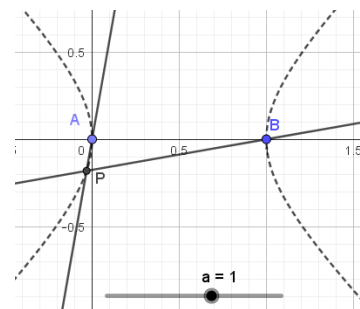
Het product van de richtingscoëfficiënten van p en q is constant, hier a genoemd.



figuur 4a



figuur 4b



figuur 4c

Met $y = mx$ en $y = \frac{a}{m}(x - 1)$ volgt de vergelijking van de kegelsnede zoals hier bedoeld.

$$y^2 = ax(x - 1) \text{ ofwel } 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{a}y^2 = 1.$$

Hiermee is goed te begrijpen: als $a < 0$ resp. $a > 0$ dan ontstaat een ellips resp. een hyperbool. Zo zijn ook de figuren 1 en 2 goed te interpreteren.

Overigens is de graad van een kegelsnedevergelijking maximaal 2.

Een meer algemene definitie is op zulke vergelijkingen gebaseerd. De volgende definitie van kegelsnede k is daarom algemeen:

$$k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + cxy + dy + ey^2 + f = 0\} \text{ met } a, b, \dots, f \text{ reële getallen.}$$

De uitdrukking $(c^2 - 4ae)$ heet de 'discriminant' van de vergelijking en daarmee is snel te bepalen met welke kegelsnede we van doen hebben.

A3 Ontwikkeling van analytische meetkunde 3

In de 16^e eeuw is er veel studie naar het oplossen van algebraïsche vergelijkingen van graad 3 en hoger in West-Europa. Oplossingen bij graad 3 en 4 worden gevonden door berekening en met formules (in radicalen) en niet meer door het snijden van kegelsneden of andere meetkundige krommen zoals de Grieken deden. Zelfs niet-voorstelbare getallen, imaginaire getallen, worden daarbij toegelaten. Hier zijn de namen van Tartaglia (1500-1557) en Cardano aan verbonden.

Met een voorbeeld is die aanpak te illustreren.

Gevraagd is de (een) oplossing van de vergelijking $x^3 + 3x = 14$.

Overigens is dit modern genoteerd. In die tijd noteert men dat zo:

“cubus p.3 rebus aequalis 14”.

Een oplossingsroute modern genoteerd:

- Schrijf: $x^3 + 3px - 2q = 0$.
- Noem: $x = u + v$.
- Vul in en werk uit:
 $(u + v)^3 + 3p(u + v) - 2q = u^3 + v^3 + (3uv + 3p)(u + v) - 2q = 0$.
 Kies nu: $uv = -p$ en er volgt: $u^3 + v^3 - 2q = 0$.
- Er geldt: $u^3v^3 = -p^3$ en $v^3 = 2q - u^3$.
- Dit geeft een vierkantsvergelijking in y : $y^2 - 2qy - p^3 = 0$.
- u^3 voldoet: $u^3 = q + \sqrt{q^2 + p^3} (=t)$ en $u = \sqrt[3]{t}$ of $u = \sqrt[3]{t}(-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3})$.
 v^3 voldoet: $v^3 = q - \sqrt{q^2 + p^3}$...
- Een oplossing zou kunnen zijn: $x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$.

Om hiermee bijvoorbeeld bij $p = 1$ en $q = 7$ de oplossingen 2 en $-1 \pm i\sqrt{6}$ te krijgen, kan gebruikt worden: $7 \pm \sqrt{7^2 + 1^3} = 7 \pm 5\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^3$.

Het vertrouwen in algebra groeit en komt los van meetkundige betekenis en Stevin (1548-1620) maakt zelfs het statement “Wat kan in meetkunde kan ook in de rekenkunde”.

Overigens is in bijvoorbeeld geschriften van Viète (1540-1603) nog wel die koppeling met meetkunde te zien. De vergelijkingen zijn daar vaak nog homogeen voor wat betreft variabelen en coëfficiënten. Dus (modern genoteerd) $x^2 + bx = c^2$ kan wel maar $x^3 + x = c^2$ is lastig: een kubus (inhoud) plus een lengte zou dan gelijk aan een oppervlakte zijn....

Belangrijk is wel dat Viète in vergelijkingen ook al bekende hoeveelheden/aantallen met letters aangeeft. Dit is een stap vooruit.

Wordt vervolgd.

P11 Vergelijkingen van graad 1 en 2

In de ontwikkeling van analytische meetkunde zijn essentiële gedachten al herkenbaar bij Fermat (1607-1665). Hij formuleert een fundamenteel principe van analytische meetkunde (althans voor het vlak):

“Als uiteindelijk in een vergelijking twee onbekende grootheden zijn gevonden, dan hebben we een meetkundige plaats (locus), en een punt daarop beschrijft een lijn, recht of gekromd.”

Hij gebruikt geen coördinatenstelsel maar wel een as, die we nu de x-as zouden noemen, en omdat het over positieve getallen (lengtes) gaat, lijken de meetkundige plaatsen vooral te liggen in wat wij nu het eerste kwadrant noemen.

Fermat vindt een mooie stelling die zonder bewijs wordt gepresenteerd:

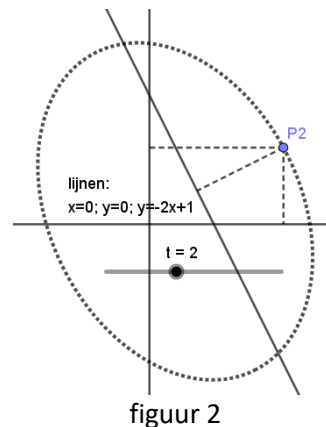
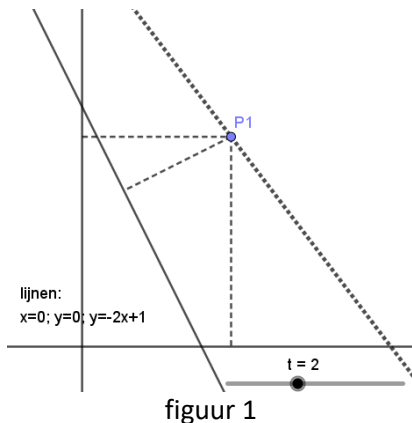
Als een aantal vaste lijnen zijn gegeven, dan is de locus van een punt, waarvan de som van de (lengtes) van de lijnstukken die onder een gegeven hoek getrokken zijn naar die gegeven lijnen constant is, een lijn.

Zie figuur 1 voor een voorbeeld met als gegeven hoek een rechte hoek en drie lijnen.

Er volgt ook nog:

Als een aantal vaste lijnen zijn gegeven, dan is de locus van een punt, waarvan de som van de kwadraten van de lijnstukken die onder een gegeven hoek getrokken zijn naar die gegeven lijnen constant is, een *solid locus* (=kegelsnede).

Zie figuur 2 weer met een rechte hoek en drie lijnen.



De afleidingen zijn eenvoudig.

Als $P(a, b)$ een punt van die meetkundige plaats is, dan geldt:

Eerste situatie: $a + b + \frac{2a+b-1}{\sqrt{5}} = t$. De vergelijking is lineair en hoort dus bij een lijn.

Tweede situatie: $a^2 + b^2 + \frac{1}{5} (2a + b - 1)^2 = t$. De vergelijking is kwadratisch en hoort bij een ellips.

Voor meer dan drie lijnen gaat het analoog en interessant is uit te zoeken of er andere kegelsneden dan ellipsen kunnen ontstaan.

P12 Vergelijkingen van graad 3 en 4

Het oplossen van vergelijkingen van graad 3 of 4 is algebraïsch gezien nog wel te doen en daarvoor zijn meestal de ingewikkelde formules met radicalen bruikbaar. Meetkundig zijn oplossingen te 'construeren' als het gebruik van een parabool is toegestaan.

Dat is te illustreren met het volgende voorbeeld.

De (een) oplossing wordt gezocht van de vergelijking: $x^3 - x - 6 = 0$.

Er is geen term met x^2 maar die zou anders eenvoudig weg te werken zijn.

Door de parabool met vergelijking $y = x^2$ te snijden met een cirkel met vergelijking:

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ vinden we een oplossing.

Invullen geeft: $x^2 - 2px + x^4 - 2qx^2 = r^2 - p^2 - q^2$.

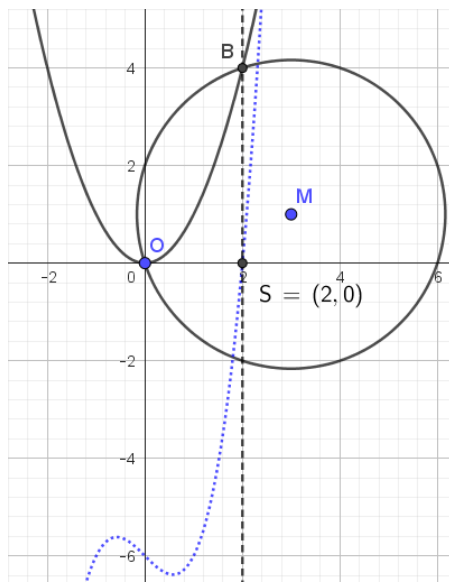
Kies eerst r : $r = \sqrt{p^2 + q^2}$. De cirkel gaat door het punt $O(0,0)$.

Er volgt: $x(x^3 + (1 - 2q)x - 2p) = 0$.

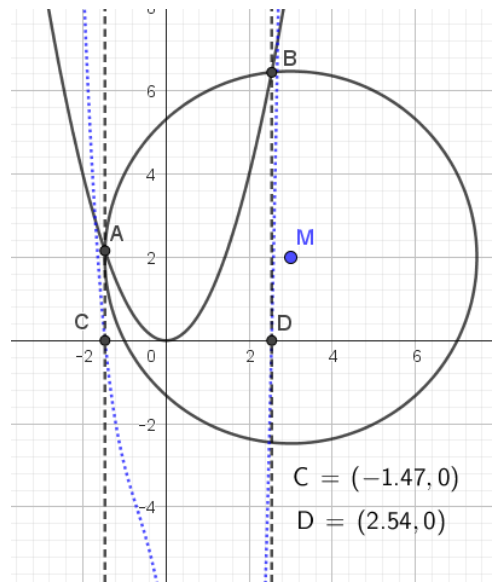
Kies nu, omdat $x \neq 0$: $p = 3$ en $q = 1$. Het middelpunt van de cirkel is $M(p, q)$ en $r = \sqrt{10}$.

De x-coördinaat van punt B is een oplossing van de vergelijking.

Zie de figuur 1 voor de 'constructie'.



figuur 1



figuur 2

Analoog gaat het voor een vergelijking als $x^4 - 3x^2 - 6x - 7 = 0$. Er is géén term met x^3 .

Snijding van de parabool met de cirkel geeft na invulling:

$x^4 + (1 - 2q)x^2 - 2px + p^2 + q^2 - r^2 = 0$.

Kies nu $p = 3$ en $q = 2$. Het middelpunt van de cirkel is $M(p, q)$ en $r = \sqrt{20}$.

Zie figuur 2 voor de 'constructie'. De x-coördinaten van de punt A en B zijn oplossingen van de vergelijking.

Er zijn natuurlijk situaties waarin er geen snijpunten ontstaan.

P13 Raakcirkels van Apollonius

In zijn werk over kegelsneden formuleert Apollonius een aantal raakcirkelproblemen. De vraag is dan steeds:

gegeven een 3-tal objecten, punt P en/of lijn L en/of cirkel C, dan wordt gezocht een cirkel, die aan deze objecten raakt. Raken aan een punt P wil zeggen dat P op dat object ligt.

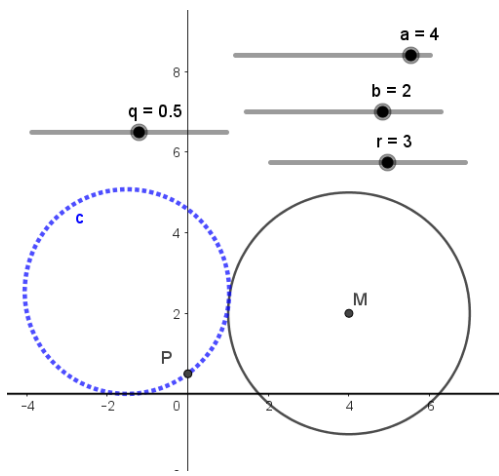
Er zijn in totaal 10 startsituaties: PPP, PPL, PPC, PLL, PLC, PCC, LLL, LLC, LCC, CCC.

Oplossingen zijn te vinden middels gebruik van macht t.o.v. cirkels en met bijvoorbeeld inversie.

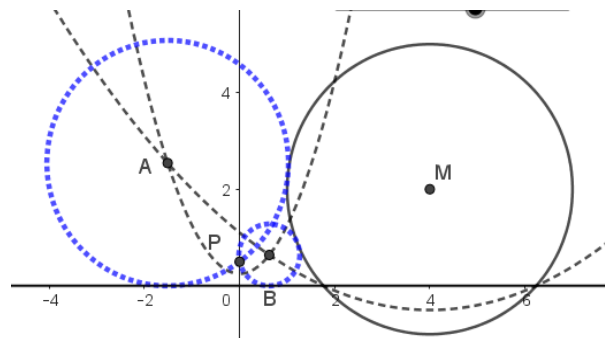
Maar ook met analytische meetkunde zijn oplossingen te vinden.

Dat is goed te zien met bijvoorbeeld de startsituatie PLC. Zie figuur 1.

Gezocht wordt de gestippelde cirkel door $P(0, q)$ die raakt aan lijn L met vergelijking $y = 0$ en raakt aan cirkel C met vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.



figuur 1



figuur 2

De aanpak voor deze situatie gaat bijvoorbeeld zo:

Het middelpunt $S(x, y)$ van de gevraagde cirkel ligt even ver van L als van P dus op een parabool met P als brandpunt en L als richtlijn. Die heeft vergelijking: $y = \sqrt{x^2 + (y - q)^2}$ ofwel: $2qy = x^2 + q^2$.

Maar $S(x, y)$ ligt ook even ver van L als van C.

Dat geeft vergelijking: $y = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} - r$

ofwel: $(2r + 2b)y = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 + r^2$. Hier hoort weer een parabool bij.

De snijpunten van deze parabolen zijn A en B en dat zijn middelpunten van de, in dit geval, twee raakcirkels. Zie figuur 2.

De twee parabolen snijden elkaar in twee punten dus er zijn maximaal twee raakcirkels in de getekende situatie.

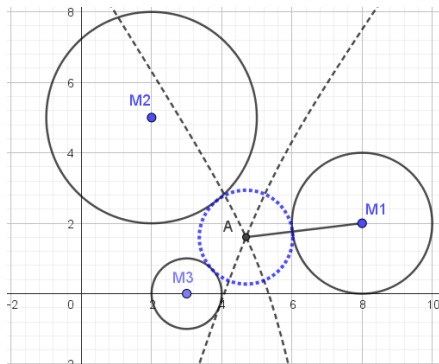
Het geval CCC maakt gebruik van andere kegelsneden.

Om dat te illustreren is hier een concrete situatie genomen, zie figuur 3.

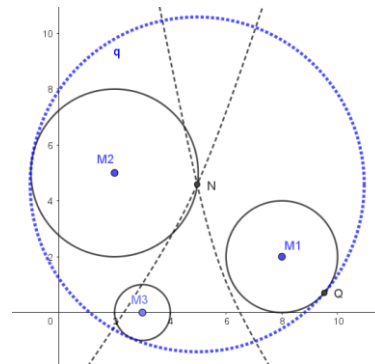
Gezocht wordt een cirkel die raakt aan

cirkel c1 ($M_1, 2$) en aan cirkel c2 ($M_2, 3$) en aan cirkel c3 ($M_3, 1$).

Het middelpunt van zo'n cirkel ligt op de conflictlijn van c_1 en c_2 en dat is een hyperbool.
 Het middelpunt ligt ook op de conflictlijn van c_1 en c_3 en dat is weer een hyperbool.



figuur 3



figuur 4

De conflictlijn van c_1 en c_2 heeft vergelijking:

$$\sqrt{(x-8)^2 + (y-2)^2} - 2 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} - 3, \text{ ofwel}$$

$$35x^2 - 36xy - 224x + 8y^2 + 124y + 332 = 0.$$

De conflictlijn van c_1 en c_3 heeft vergelijking:

$$\sqrt{(x-8)^2 + (y-2)^2} - 2 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 1, \text{ ofwel}$$

$$24x^2 + 20xy - 284x + 3y^2 - 116y + 832 = 0.$$

In beide gevallen gaat het om een hyperbool: de discriminanten zijn positief.

Merk op dat er in totaal acht raakcirkels zijn. Die zijn te vinden door de stralen erbij op te tellen of eraf te trekken. Als voor de conflictlijnen overal de straal erbij gerekend was, dan ontstaat de raakcirkel zoals in figuur 4.

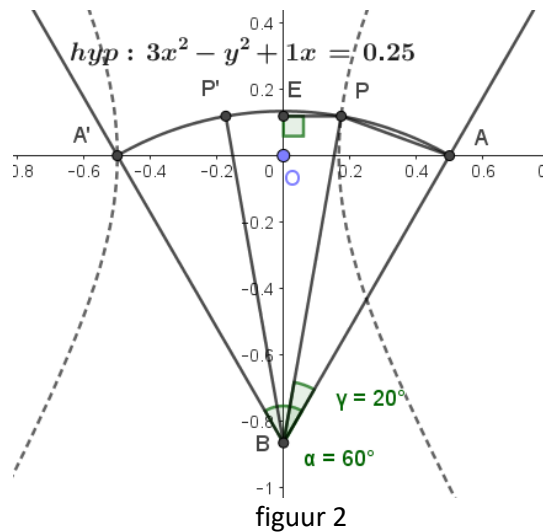
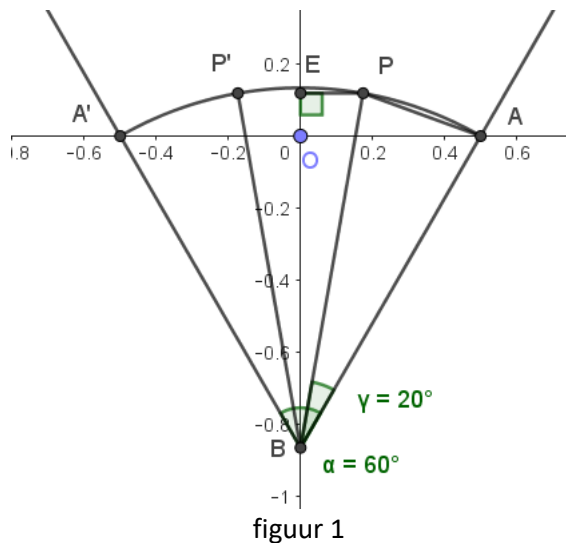
P14 Trisectie en kegelsneden

Bij trisectie van een hoek α gaat het om de constructie van een lijnstuk van een bepaalde lengte en dat getal voldoet aan de trisectievergelijking: $x^3 - 3x - 2a = 0$.

Er geldt: $a = \cos(\alpha)$ en $x = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$.

Een oplossing van een derdegraads vergelijking is te 'construeren' met een parabool en een cirkel (zie P12) maar kan ook met bijvoorbeeld een hyperbool.

De volgende aanpak is van Pappos. Zie figuur 1.



Als BP een trisectrice is, dan geldt: $|AP| = |PP'| = |P'A'|$.

A en A' zijn geconstrueerd bij een gegeven hoek α : $\angle BOA = \frac{\alpha}{2}$; $|BA| = 1$.

Er geldt: $|BO| = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Dus punt B is te construeren. Noem $A(c, 0)$.

Voor punt $P(x, y)$ geldt nu: $|PA| = 2 \cdot |PE|$.

Blijkbaar voldoen de coördinaten van P aan de vergelijking:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2x \text{ ofwel: } 3x^2 + 2cx - y^2 - c^2 = 0.$$

Dit is de vergelijking van een hyperbool. Ingetekend geeft die na snijding met cirkel(B,1) het gevraagde punt P van de trisectrice BP. Zie figuur 2.

In het voorbeeld geldt: $\alpha = 60^\circ$ en $c = \sin(30^\circ) = 0.5$.

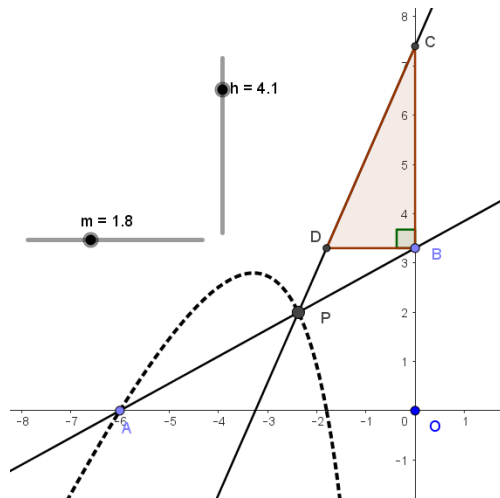
De cirkel heeft als vergelijking: $x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 1$. Die cirkel is dus te construeren.

De hyperbool is helaas niet als continue kromme te 'construeren'. Aan te tonen is dat bij een starthoek van bijvoorbeeld 90° en 45° de coördinaten van P wel met P&L te construeren zijn.

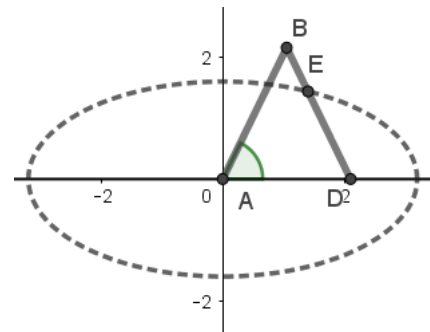
P15 Tekeninstrumenten voor kegelsneden

De passer als tekeninstrument voor een cirkel is bekend en de Grieken accepteren moeizaam andere instrumenten om krommen te tekenen. Descartes vindt andere mechanische instrumenten wel toelaatbaar want de passer en liniaal zijn toch ook gewoon instrumenten waarmee mechanische handelingen verricht worden...

In *La Géométrie* komt de volgende constructie van een hyperbool voor, hier iets vereenvoudigd. Voor de lijn door A en B geldt: A ligt vast op de x-as en B varieert over de y-as. Met de variatie van B beweegt ook een vast gekozen driehoek BCD mee. De lijn door C en D snijdt de lijn door A en B in een punt P. Zie figuur 1



figuur 1



figuur 2

Met $A(a, 0)$ en $B(0, b)$ met b dus als parameter is punt $P(x, y)$ een snijpunt.

Lijn CD heeft vergelijking: $y - (b + h) = \frac{h}{m}x$.

Lijn AB heeft vergelijking: $y = \frac{b}{a}(a - x)$.

Snijden van deze twee lijnen geeft voor de coördinaten van P de vergelijking:

$$ay = (a - x) \left(y - h - \frac{h}{m}x \right) \text{ ofwel } \frac{h}{m}x^2 + \left(h - \frac{ah}{m} \right)x - xy - ah = 0.$$

Dit is de vergelijking van een hyperbool met de y-as als asymptoot en één scheve asymptoot.

In figuur 2 is een 'constructie' te zien van een ellips zoals Frans van Schooten (1615-1660) die maakte. AB en BD zijn latjes en in E kan een schrijfpunt gezet worden.

$|AB| = |BD|$ en punt E ligt vast op lijnstuk BD. Door punt D over de x-as te schuiven beschrijft punt E een ellips.

A4 Ontwikkeling van analytische meetkunde 4

Met Fermat en Descartes zet de ontwikkeling van analytische meetkunde echt door. Fermat is overigens géén professioneel wiskundige maar een jurist met grote interesse in de meetkunde van de oudheid. Hij formuleert een fundamenteel principe van analytische meetkunde namelijk het vinden van een meetkundige plaats (*locus*) vanuit een betrekking van twee grootheden.

Dit is wezenlijk. Eerder zoals bij Apollonius wordt een kromme met hulp van lijnen beschreven en volgt de typering van de kromme maar nog geen vergelijking in variabelen.

Bij Fermat wordt begonnen met een algebraïsche vergelijking met bekende en onbekende variabelen (die bekenden zouden wij nu parameters noemen) en hij laat zien hoe die als locus is vastgelegd in een systeem met één as, een soort x-as. Hij blijft overigens werken in wat wij nu het eerste kwadrant noemen.

Descartes bestudeert krommen binnen de meetkunde als het mogelijk is hun vergelijking te vinden. En daarbij mogen gerust andere objecten dan lijn of cirkel de definiërende elementen zijn.

Daarbij hoort wel een afbakening wat wel of niet toelaatbaar is.

Uit onderzoek⁵ blijkt dat Descartes zo naar krommen kijkt:

	Acceptatie	Vergelijkingen	Afwijzing
<i>Spoor</i> van een punt door beweging	A>Krommen ontstaan als spoor door continue beweging m.n. als lijnen of krommen continu bewegen en zo snijpunten ontstaan. Vb: mesolabum, conchoïde	B>Hierbij horen algebraïsche vergelijkingen.	C>Als er geen 'meetbare' relatie is tussen de objecten die bewegen.
Puntsgewijze constructie	D>Als dit in principe voor elk punt op de kromme kan, dan kan de kromme ook ontstaan door continue beweging. Vb: lijnenprobleem van Pappos	E>De vergelijking impliceert en veronderstelt een techniek om wortels van vergelijkingen te kunnen construeren.	F>Als er ook punten op de kromme zijn die niet door puntsgewijze constructie te maken zijn. Vb: quadratrix
<i>Spoor</i> v.e. punt door procedures met touw	G>Als dit gebruikt wordt enkel om de validiteit van het verband tussen lijnen te bewijzen. Vb: kegelsneden	H>[Descartes maakt hierover geen opmerkingen]	K>Als gedurende het proces van recht naar gekromd wordt overgegaan. Vb: spiraal Huygens

Redeneringen van Descartes volgen de route $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A \dots$

Wordt vervolgd.

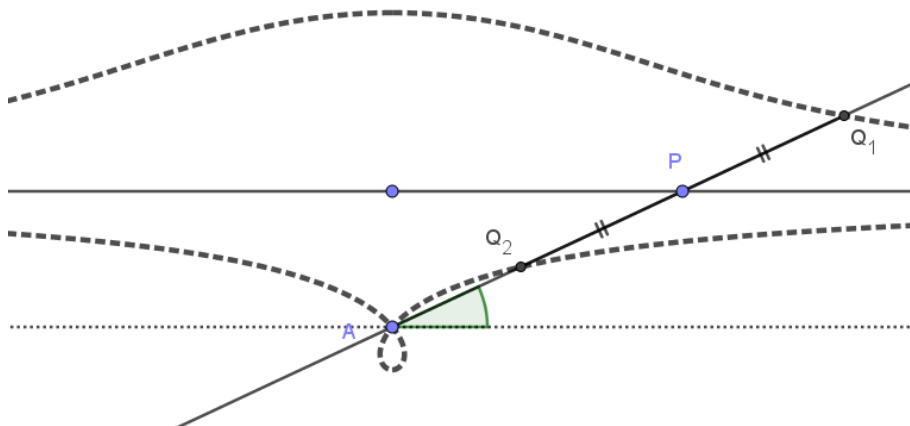
⁵ Zie bijvoorbeeld Bos. H (2001). *Redefining geometrical exactness*. Uitg. Springer

P16 De conchoïde van Nicomedes

Het gebruik van passer en liniaal is de standaard bij P&L-constructies. Op de liniaal staan geen streepjes ofwel, er wordt geen afstand gemeten.

Neusis-constructies maken daar wel gebruik van. Op een lijn (liniaal) zijn twee punten P en Q vast gegeven. Als de lijn door een vast punt A gaat en punt P een gegeven kromme k volgt, dan beschrijft punt Q een kromme z: dit is een neusis-constructie.

Kromme k kan gewoon een lijn zijn. Zie figuur 1.



figuur 1

Omdat op de lijn door A punt Q aan twee kanten van P kan liggen zijn hier ook maar meteen de twee takken van de zogenaamde *conchoïde*⁶ getekend. In poolcoördinaten is bijvoorbeeld punt Q1 eenvoudig te beschrijven: $|AQ_1| = r(\alpha) = \frac{a}{\sin(\alpha)} + b$. Met $d(A, lijn) = a$ en $|PQ_1| = b$.

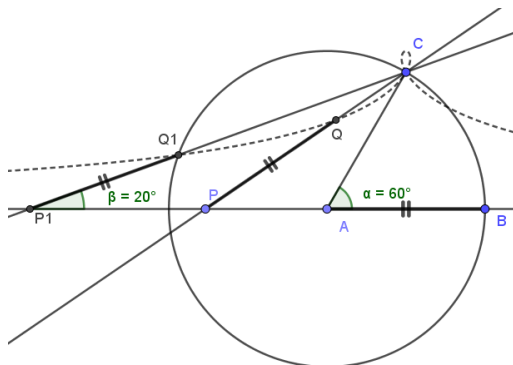
Trek b af om de meetkundige plaats van Q2 te vinden.

Omgewerkt naar cartesische coördinaten met $A(0,0)$ wordt dat:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ab}{y-a} \pm b \text{ en verder uitgewerkt: } b^2 y^2 = (y - a)^2 (x^2 + y^2).$$

Een vergelijking van graad 4 is ontstaan

Archimedes gebruikt dit idee om trisectie te doen. Zie figuur 2.



figuur 2

Hoek BAC is de starthoek.

C is nu een vast punt.

Door punt P op een lijn door C over de lijn door A en B te schuiven, ontstaat een conchoïde.

Die snijdt de cirkel(A, |AB|) in een punt Q1.

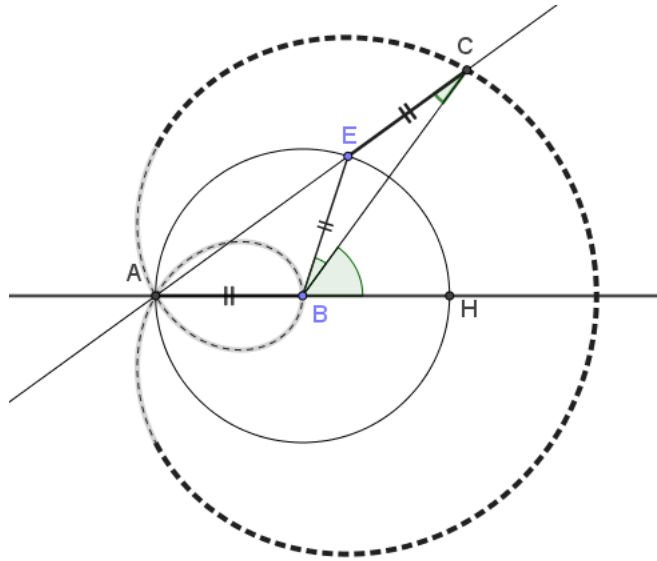
Nu geldt dat hoek BP1C het derde deel is van hoek BAC.

Het bewijs is eenvoudig omdat $\triangle ACQ_1$ gelijkbenig is.

⁶ Conchoïde van Nicomedes (280 – 210 BC)

Kromme k kan ook een cirkel zijn. De slaklijnen van Pascal (1623-1662) ontstaan indien k een cirkel is.

Zie figuur 3.



figuur 3

A op cirkel $(B, |AB|)$ is nu het vaste punt. De slaklijn ontstaat bij de neusis-constructie: E beweegt over de cirkel en het uitgezette lijnstuk heeft als lengte de straal van de cirkel.

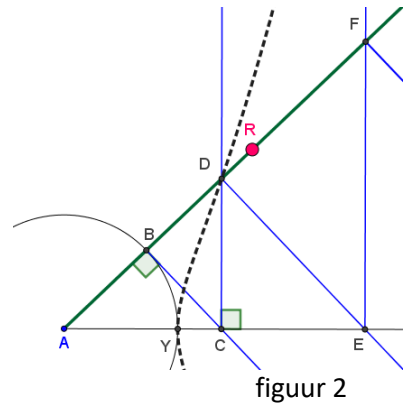
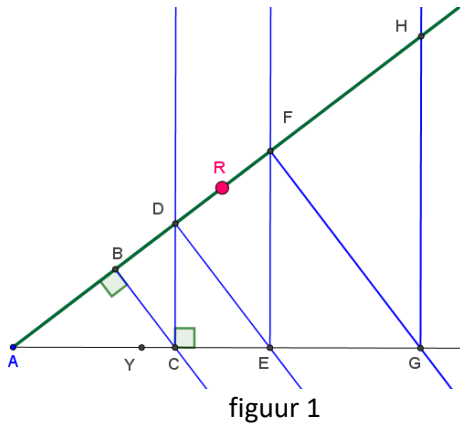
Deze slaklijn is ook te gebruiken voor trisectie.

Bij B wordt een gegeven hoek gezet. Een been van die hoek snijdt de slaklijn in C.

Dan is aan te tonen dat de gemarkeerde kleine hoekjes het derde deel van de starthoek zijn.

P17 Het mesolabum van Descartes

Descartes gaat verder in het gebruik van andere instrumenten dan passer en liniaal. Hij gebruikt een zogenaamd *mesolabum*, een instrument bestaande uit verschillende schuivende linialen. Zie figuur 1.



Lijn (liniaal) AY is vast gegeven. Lijn (liniaal) AR draait om A. Een punt B ligt vast op lijn AR. Te B wordt een lijn (liniaal) loodrecht op AR gezet. Dat geeft snijpunt C. Te C wordt een lijn (liniaal) loodrecht op AY gezet. Dat geeft snijpunt D. En dit proces is te herhalen: $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow \dots$

Door nu AR te draaien, beschrijft B een cirkel maar D, F, H, ... nieuwe krommen, zie figuur 2. Begin met $|AB| = 1$ en $|AC| = t$. Op basis van verhoudingen $|AB| : |AC| = |AC| : |AD|$ etc. volgt: $|AD| = t^2$; $|AE| = t^3$; $|AF| = t^4$; $|AG| = t^5$; $|AH| = t^6$.

Met $A(0,0)$ geldt nu voor punt $D(x,y)$: $y^2 = |CD|^2 = |AD|^2 - |AC|^2 = x^4 - x^2$.

Kies een getal $a > 1$. Leg het mesolabum zo via draaiing van AR zodat $|AE| = a$. Er volgt: $a = t^3$. Dus er is zo 'geconstrueerd': $|AC| = t = \sqrt[3]{a}$.

Hiermee is voor $a = 2$ het probleem van de verdubbeling van de kubus 'opgelost'.

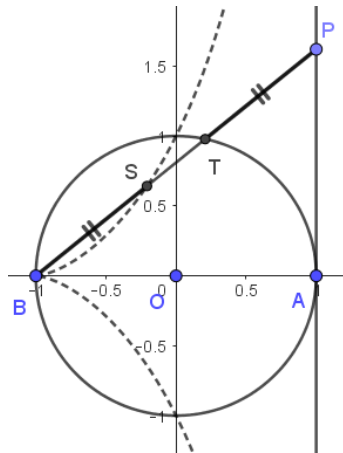
Met het mesolabum is ook een oplossing te vinden d.w.z. te 'construeren' van vergelijkingen als $x^5 = 2$; $x^4 - x^2 = 3$.

P18 De cissoïde van Diocles

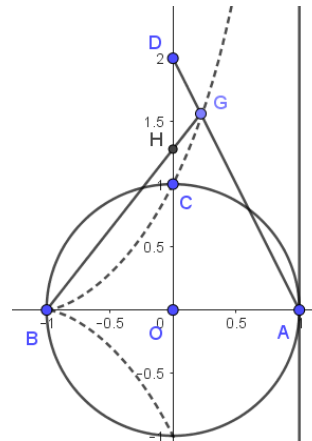
Een kromme die ontstaat door een continue afpassing van lengtes is de *cissoïde*⁷.

(Gr. Κισσοειδης; lijn in de gedaante van een klimopblad (Κισσος; klimop)).

Zie figuur 1. De kromme is de meetkundige plaats van punten S waarbij punt P beweegt over de verticale lijn en er geldt: $|PT| = |OS|$.



figuur 1



figuur 2

Met als parameter de hoek ABP (α) is een vergelijking snel te vinden.

In poolcoördinaten: $|OS| = r(\alpha) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha) \right)$.

In rechthoekige coördinaten geldt voor $S(x, y)$: $(1 - x)y^2 = (1 + x)^3$. [1]

De y-as snijdt de cirkel in $C(0,1)$.

Deze kromme is te gebruiken om een oplossing van de vergelijking $x^3 = 2$ te 'construeren'.

Zie figuur 2.

- De lijn door $D(0,2)$ en A heeft de vergelijking: $y = 2(1 - x)$. [2]
- Die lijn snijdt de cissoïde in punt $G(p, q)$.
- De lijn door B en G heeft de vergelijking: $y = \left(\frac{q}{1+p} \right)(x + 1)$.
- Die lijn snijdt de y-as in $H(0, t)$ met $t = \frac{q}{1+p}$.
- Nu geldt: $t^3 = 2$.

Bewijs: $t^3 = \frac{q^3}{(1+p)^3} = [3] \frac{8(1-p)^3}{(1-p)q^2} = \frac{8(1-p)^3}{(1-p)^4(1-p)^2} = 2$.

Bij [3] teller volgens [2] en noemer volgens [1] herschreven.

Hiermee is dus tevens het Delische probleem opgelost.

Voor elke waarde $a > 0$ waarvoor een punt $D(0, a)$ op de y-as te construeren is, is dus nu tevens een lengte t te 'construeren' waarvoor geldt: $t = \sqrt[3]{a}$.

⁷ Cissoïde van Diocles (ca. 240 - ca. 180 BC)

P19 Lijnenprobleem van Pappos

Gegeven is een aantal (n) lijnen L_1, L_2, \dots , een aantal hoeken $\theta_1, \theta_2, \dots$ en lijnstukken d_1, d_2, \dots en een constante a . Vanuit een punt P wordt lijnstuk d_i onder een hoek θ_i naar L_i getrokken met $i = 1, 2, \dots, n$. Wat is de meetkundige plaats van de punten P zodanig dat:

bij $n=3$: $d_1 \cdot d_1 = d_2 \cdot d_3$

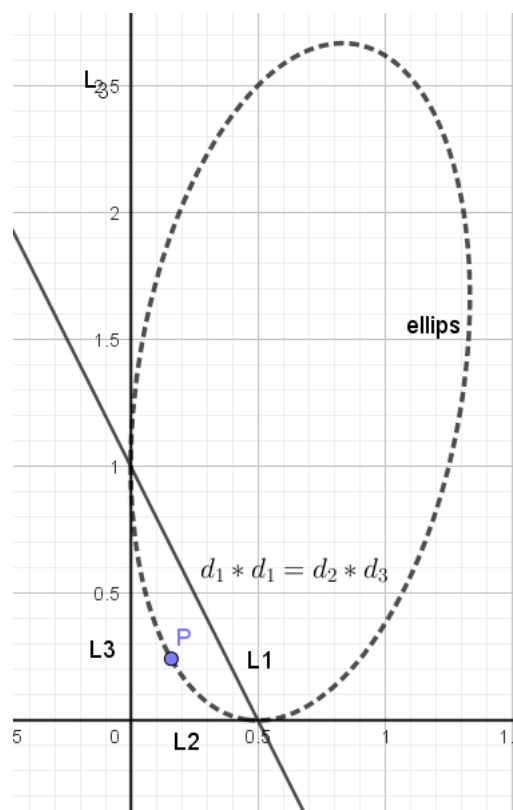
bij $n=4$: $d_1 \cdot d_2 = d_3 \cdot d_4$

bij $n=5$: $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = a \cdot d_4 \cdot d_5$

Feitelijk is dus de zoektocht naar bij welke lijnstukken er een punt P is zodat...

Voor $n=3$ resp. $n=4$ ontstaan kegelsneden als meetkundige plaatsen voor punten P .

Zie een voorbeeld bij $n=3$ in figuur 1.



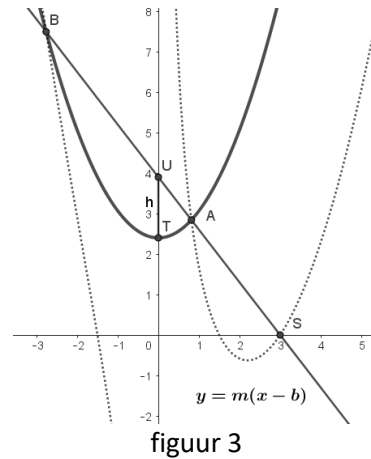
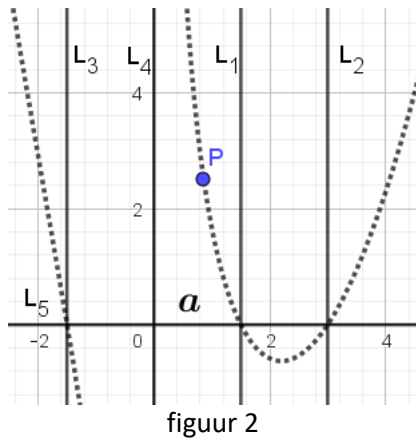
figuur 1

Voor $n=5$ ontstaat een kubische vergelijking. Er zijn zeer verschillende situaties mogelijk.

Zie figuur 2 voor één speciaal geval:

Vier lijnen zijn evenwijdig, de vijfde lijn staat daar loodrecht op.

Alle hoeken zijn recht. De lijnen hebben onderling dezelfde afstand.



In figuur 2 is af te lezen met L_4 als y -as en L_5 als x -as en $P(x, y)$:

$$(a - x)(2a - x)(a + x) = axy \text{ ofwel: } x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy. [1]$$

Descartes gaat van deze kubische vergelijking oplossingen 'construeren' en gebruikt daarvoor meer dan lijn en cirkel namelijk ook een parabool.

- Kies een punt $S(b, 0)$ en een lijn daardoor. Vergelijking: $y = m(x - b)$. [2]
- Deze lijn snijdt de y -as in $U(0, -mb)$.
- Kies nu een parabool met vergelijking: $y = qx^2 - mb - h$. [3] Die gaat door T.
- Kies nu: $(b, q, h) = (2a, \frac{1}{a}, a)$.
- De parabool en de lijn snijden in punten A en B en die punten liggen op de kromme met de kubische vergelijking. Bij variatie van m varieert de lijn en de parabool...
- Bewijs:
 Uit [3] volgt: $mb = qx^2 - y - h$.
 Uit [2] volgt dan: $by = bm(x - b) = (qx^2 - y - h)(x - b)$.
 Herschrijving geeft: $xy = qx^3 - bq x^2 - hx + hb$.
 Ofwel: $axy = aqx^3 - abqx^2 - ahx - ahb$.
- Vergelijk dit met hetgeen bij [1] staat en er volgt: $(b, q, h) = (2a, \frac{1}{a}, a)$.

Draaiing van de lijn door punt $S(2a, 0)$ betekent feitelijk wijziging van de richtingscoëfficiënt dus van m . De parabool heeft vergelijking bij vast gekozen a -waarde: $y = \frac{1}{a}x^2 - a - 2am$.

De parabool wijzigt dus niet van vorm maar schuift over zijn as (y -as) op en neer.

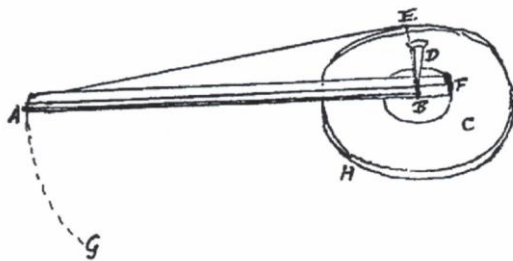
Dat vindt Descartes een legitieme manier om de punten A en B te vinden en zo oplossingen van de kubische vergelijking. Zie figuur 3.

En daarmee is een klassiek probleem van Pappos opgelost...

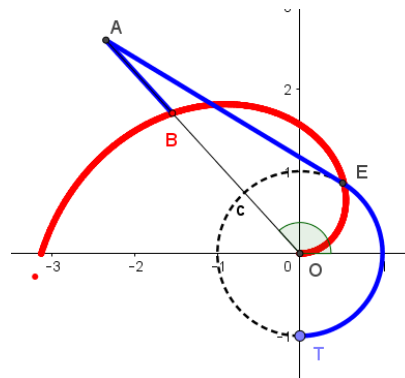
Bij een andere keuze van de lijnen L_i bijvoorbeeld in figuur 2 L_4 en L_2 verwisselt, ontstaat een andere kubische vergelijking maar de aanpak is soortgelijk als in het voorbeeld.

P20 Spiraal van Huygens

Christiaan Huygens (1629 – 1695) is een veelzijdig natuurwetenschapper en onderzoekt bijzondere krommen zoals de cycloïde, waarop hij zijn slingerklok baseert, maar ook een bijzondere spiraal. Zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

Een touw is bevestigd tussen B via A met E. Eindpunt B is los en heeft een schrijfpunt. Als nu A beweegt richting G, dan zal punt B langs lijn AF richting A bewegen, en door de draaibeweging niet in een rechte lijn maar als een spiraal...

Het resultaat is te zien in figuur 2.

Met poolcoördinaten is deze spiraal eenvoudig te beschrijven.

Met de positieve x-as als pool-as en O als pool en hoek as-OA is θ in radialen:

$$OB = r(\theta) = a \cdot \theta. \text{ In figuur 2 geldt: } a = 1.$$

In dit concrete geval stopt het proces als B punt A bereikt: het touw is op.

Het touw gaat dus hier van recht, over lijn OA, naar krom gedurende de beweging. Voor Descartes bijgevolg een niet-toelaatbare kromme want hij is overtuigd dat de verhouding tussen recht (lijnstuk) en krom (boog) nooit 'gekend' zal kunnen zijn.

Maar meer in het algemeen is een kromme met poolvergelijking $r = a \cdot \theta$ en de hoek in radialen en a een getal een alsmaar doorgaande spiraal.

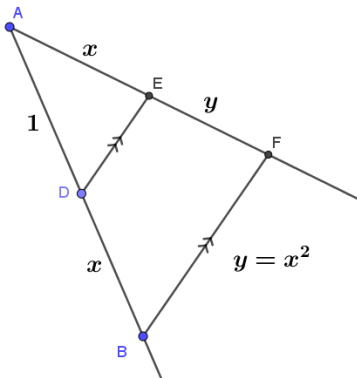
Huygens gebruikt de spiraal voor deling van een hoek o.a. voor trisectie.

A5 Ontwikkeling van analytische meetkunde 5

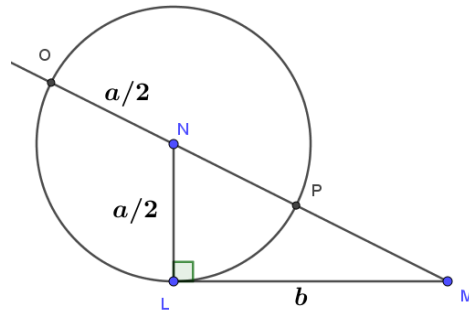
Het belang van Descartes ligt ook in een consequente toepassing van de algebra zoals Viète die had ontwikkeld op de meetkunde van de Grieken. Hij noteert aa voor a^2 en het gebruik van a, b, c voor bekende en x, y, z voor onbekende grootheden komt steeds meer voor.

Verder voert hij de notatie “=” in voor ‘is gelijk aan’: niets is meer gelijk dan twee streepjes.

Er zijn nog geen assen of coördinaten in moderne zin in gebruik: het probleem blijft om bij coördinaten, die lijnstukken voorstellen, ook negatieve waarden toe te laten. Overigens zijn coördinaten in numerieke zin niet geheel onbekend: Ptolemeus (rond 100 AD) geeft al punten op een bol aan door middel van lengte en breedte in getallen.



figuur 1



figuur 2

Een sprong voorwaarts is zeker om x^2 niet meer te zien enkel als oppervlakte van een vierkant maar ‘gewoon’ als lengte van een lijnstuk. Een gevolg is een toelaatbare vergelijking als: $x^2 + x = 12$. In figuur 1 is te zien hoe bij gegeven eenheids-lengte en x een lengte x^2 te construeren is.

Descartes publiceert een oplossing van een vergelijking als $x^2 = ax + b^2$ met een vrij moderne methode, zie figuur 2. $|OM| = x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$.

NB: Maar geen oplossing met min-teken!

In *La Géométrie* toont Descartes de kracht van zijn methode door uitvoerig het oude lijnenprobleem van Pappos te behandelen.

Er zijn ook conflicten.

Fermat ontwikkelt al het idee van raaklijnen aan krommen met hulp van een soort limiet-redenering zoals wij die kennen: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta) - f(a)}{\Delta}$.

Mersenne (1588-1648) bericht deze aanpak in 1638 aan Descartes die vervolgens die methode bekritiseert als niet algemeen geldig. Hij geeft als uitdagend voorbeeld zijn *folium*.

Wordt vervolgd.

P21 Alle parabolen zijn gelijkvormig

Uiteraard zijn alle cirkels gelijkvormig maar niet alle ellipsen en niet alle hyperbolen.

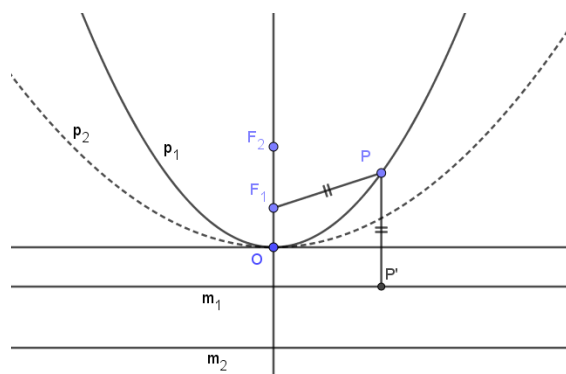
Alle parabolen zijn juist wel weer gelijkvormig.

Veronderstel dat er twee parabolen zijn: p_1 (brandpunt F_1 ,richtlijn m_1) en $p_2(F_2,m_2)$.

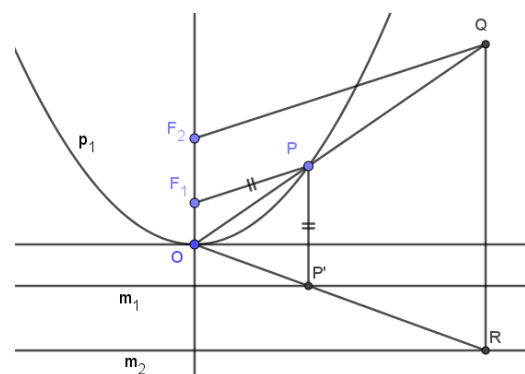
Kies als as van p_1 de y-as en als topgraaklijn de x-as.

Parabool p_2 is alvast zo gedraaid en getransleerd dat de topgraaklijn ook de x-as is.

Bijgevolg is de y-as nu ook de as van parabool p_2 . Zie figuur 1



figuur 1



figuur 2

Met $|OF_1| = a$ en $|OF_2| = b$ volgt: $F_0, \frac{b}{a}(F_1) = F_2$ en $F_0, \frac{b}{a}(m_1) = m_2$. [1]

Als P op p_1 ligt, dan volgt: $F_0, \frac{b}{a}(P) = Q$,

Er geldt dan: $|QF_2| = \frac{b}{a} |PF_1|$ en $QF_2 // PF_1$. [2]

Maar ook: $F_0, \frac{b}{a}(P') = R$ en $F_0, \frac{b}{a}(PP') = QR$. Punt R ligt op m_2 volgens [1].

Er geldt dus: $|QR| = \frac{b}{a} |PP'|$ en $QR \perp m_2$ want $PP' \perp m_1$. [3]

Uit [2] en [3] volgt: Q ligt op een parabool met brandpunt F_2 en richtlijn m_2 dus op p_2 .

P was willekeurig gekozen op p_1 dus de afbeelding $F_0, \frac{b}{a}$ beeldt p_1 af op p_2 .

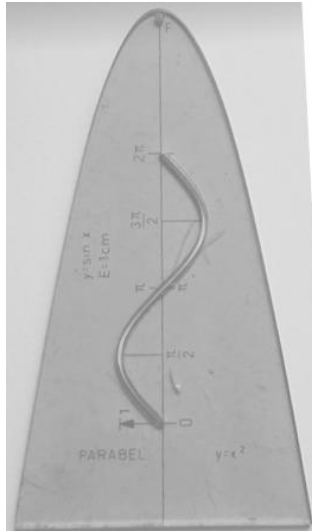
De parabolen p_1 en p_2 zijn bijgevolg gelijkvormig.

Door deze afbeelding vooraf te laten gaan door een draaiing en een translatie is te zien: elke parabool is gelijkvormig met p_1 . Parabolen zijn dus allemaal gelijkvormig.

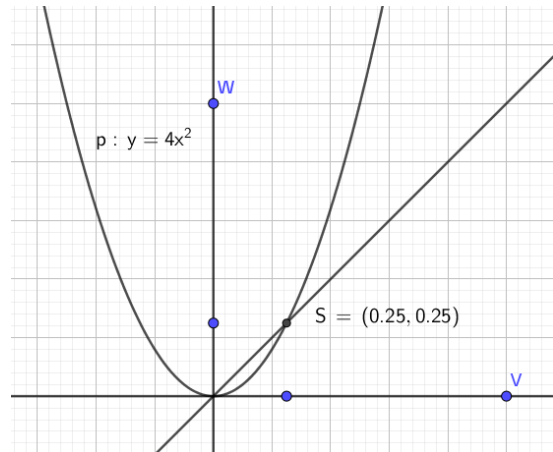
In allerlei 'constructies' wordt naast liniaal en passer soms ook een mal/sjabloon voor een parabool gebruikt.

Op het sjabloon staat de vergelijking $y = x^2$. Zie figuur 3.

Als gewenst is een parabool met een bepaalde vergelijking, hoe moet dan het assenstelsel gekozen worden opdat daarbij die mal toch gebruikt kan worden?



figuur 3



figuur 4

Gegeven een parabool met de vergelijking: $y = 4x^2$. Zie figuur 4.

De lijn met vergelijking $y = x$ is altijd te tekenen in een assenstelsel met gelijke eenheden namelijk als de bissectrice van de hoek x-as en y-as.

Die lijn snijdt de getekende parabool in $S(p, p)$: $x_S = y_S$ want S ligt op die lijn.

Er geldt dus: $p = 4p^2$ en bijgevolg $p = \frac{1}{4}$.

Daarmee ligt $S\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ vast en daarmee dus punt $V(1,0)$ en $W(0,1)$.

Het assenstelsel ligt nu vast en de parabool-mal is weer te gebruiken...

In feite wordt hier de parabool met vergelijking $y = x^2$ vermenigvuldigd en dan vervolgens de eenheden op de assen aan te passen.

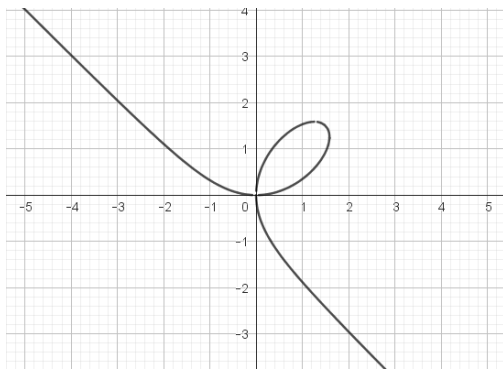
Met als as de lijn met vergelijking $x = a$ ($a \neq 0$) en topstraaklijn met vergelijking $y = b$ ($b \neq 0$) is de parabool dus getransleerd maar de aanpak is soortgelijk als hierboven.

P22 Folium van Descartes

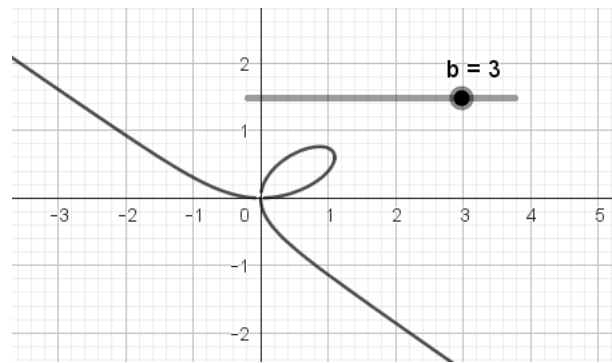
Descartes onderzoekt de volgende derdegraadsvergelijking:

$x^3 + y^3 = 3xy$. Gevraagd zijn de zijden van twee kubi die samen gelijk zijn aan een blok met zijden x, y en 3.

De kromme wordt geplot, zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

Een lijn met vergelijking $y = tx$ snijdt deze kromme in $O(0,0)$ maar ook in $A\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Daarmee is meteen een parametervoorstelling bekend.

Een lijn m met vergelijking $y = -x + p$ kan raken, snijden of zelfs een asymptoot zijn.

Enige analyse laat zien wanneer er snijpunten zijn.

- Begin: $x^3 + y^3 = axy$.
- Snijden met de lijn m geeft: $x^3 + (p-x)^3 = ax(p-x)$.
- Uitgewerkt wordt dit: $(a+3p)x^2 - p(3p+a)x + p^3 = 0$.
- Oplossingen indien de discriminant niet negatief is.
Dus: $p^2(3p+a)(a-p) \geq 0$.
- Er volgt: $-\frac{a}{3} \leq p \leq a$.

Voor $a = 3$ vindt Huygens de asymptoot met vergelijking: $y = -x - 1$.

Met de parametervoorstelling is te zien:

$$\lim_{t \uparrow -1} (x(t), y(t)) = (\infty, -\infty) \text{ en } \lim_{t \downarrow -1} (x(t), y(t)) = (-\infty, \infty).$$

Kleine variaties geven al meteen heel andere resultaten.

Zie figuur 2. Geplot is de kromme: $x^3 + by^3 = 3xy$.

Met impliciet differentiëren zijn richtingscoëfficiënten van raaklijnen te vinden, een techniek die bij Descartes nog niet bekend is. De methode van Fermat ofwel het gebruik van limietrekening werkt hier niet zo goed.

P23 Begin van differentiaalrekening

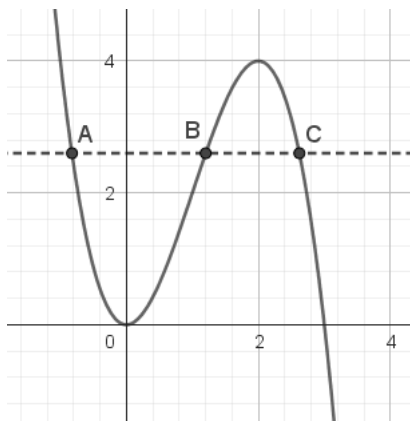
In de 17^e eeuw staat de differentiaalrekening nog in de kinderschoenen. Newton en Leibniz ontwikkelen daarvoor de technieken die nu nog gebruikt worden.

Descartes is niet zover maar heeft wel een bijzondere manier om algebraïsch meetkundig een oplossing voor een maximum/minimum van een uitdrukking te vinden.

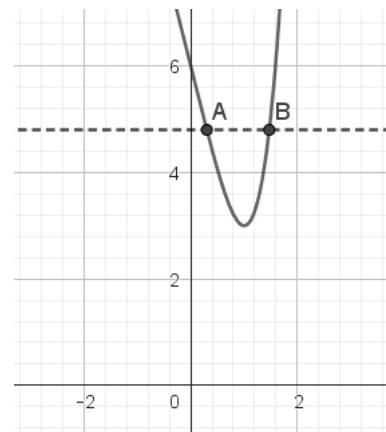
Neem als voorbeeld de uitdrukking: $x^2(3 - x)$.

Gezocht is voor welke x-waarde een maximale waarde wordt bereikt en wat dat maximum dan is.

Zie figuur 1



figuur 1



figuur.2

De redenering is als volgt:

- Noem die maximale waarde m .
- Een derdegraads uitdrukking 'dus' er is een ontbinding in drie factoren.
Zie de lijn die de grafiek van $y = 3x^2 - x^3$ snijdt.
- Als die lijn stijgt dan schuiven B en C naar elkaar toe en in het maximum vallen zij samen.
Als dat bij de x-waarde p is, dan is de uitdrukking te schrijven als:
 $m - (x - p)^2(x - q) = 3x^2 - x^3$.
- Uitgewerkt wordt dat:
 $x^3 - (2p + q)x^2 + (2pq + p^2)x - p^2q = x^3 - 3x^2 + m$.
- Er volgt: $2p + q = 3$; $2pq + p^2 = 0$; $-p^2q = m$.
Dus: $p = 2$ of $p = -1$ (V.N.); $q = -1$; $m = 4$.
- Ofwel te $x = 2$ wordt de maximale waarde 4 bereikt.

Dit is een methode die later leidt naar afgeleiden en nulpuntenonderzoek maar Descartes zelf werkt dit niet verder uit.

Soortgelijk is ook het onderzoek naar het minimum van de volgende uitdrukking te doen:

$x^4 - 4x + 6$. Zie figuur 2.

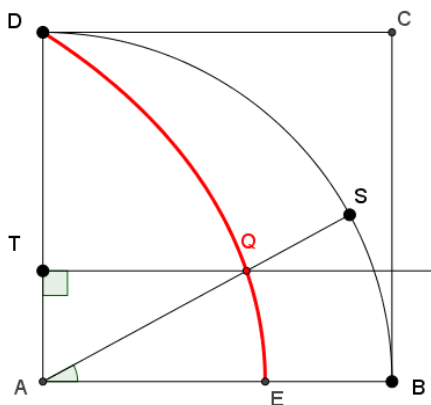
P24 Quadratrix van Hippas ⁸

In de zoektocht naar oplossingen van de klassieke problemen, waarvan de Grieken al vermoeden dat die met P&L alleen er niet waren, komen diverse krommen langs.

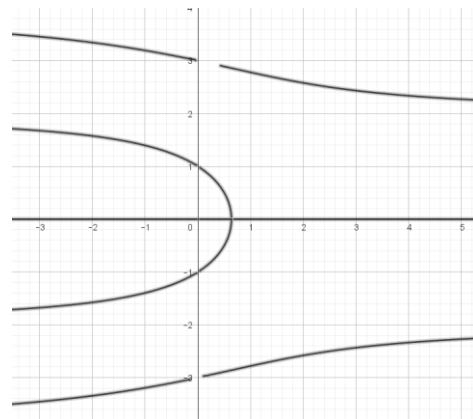
De kegelsneden uiteraard maar ook zogenaamde niet-algebraïsche krommen worden bestudeerd.

Een daarvan is de *quadratrix* van Hippas. Zie figuur 1.

In vierkant ABCD beweegt een punt (T) vanuit A over AD éénparig richting D en gelijk op gaat een punt (S) vanuit B over de cirkelboog richting D. In de figuur is één situatie getekend. Als $|AT| = \lambda|AD|$, dan is dus $bg BS = \lambda \cdot bg BD$. Lijn AS snijdt de loodlijn te T in punt Q. Als dit proces vloeiend kan worden uitgevoerd, dan is de meetkundige plaats van zulke punten Q een continue kromme.



figuur 1



figuur 2

Met deze kromme is elke hoek, hier bedoeld kleiner dan 90° , te triseren.

Als voorbeeld dient hoek BAS. De quadratrix wordt door lijn AS gesneden in punt Q.

De loodlijn op AD geeft punt T. Door nu lijnstuk AT met P&L in drie [1] gelijke delen te verdelen en van daaruit weer een loodlijn op te richten, ontstaat een nieuw snijpunt met de quadratrix, een punt P. Hoek EAP is dan het derde deel van hoek BAS.

Merk op dat bij [1] elk geheel getal kan staan. Vijfdeling, zeventeling etc. is dus ook mogelijk.

De kromme heeft een niet-algebraïsche vergelijking.

In poolcoördinaten geldt voor Q: $r = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)}$.

In rechthoekige coördinaten: $\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)$.

In figuur 2 staat de kromme 'volledig' getekend.

Als S richting B gaat, dan gaat Q richting E. In dat geval is er dus een limietsituatie met $y \rightarrow 0$.

Aan te tonen is dat voor E geldt: $E\left(\frac{2}{\pi}, 0\right)$.

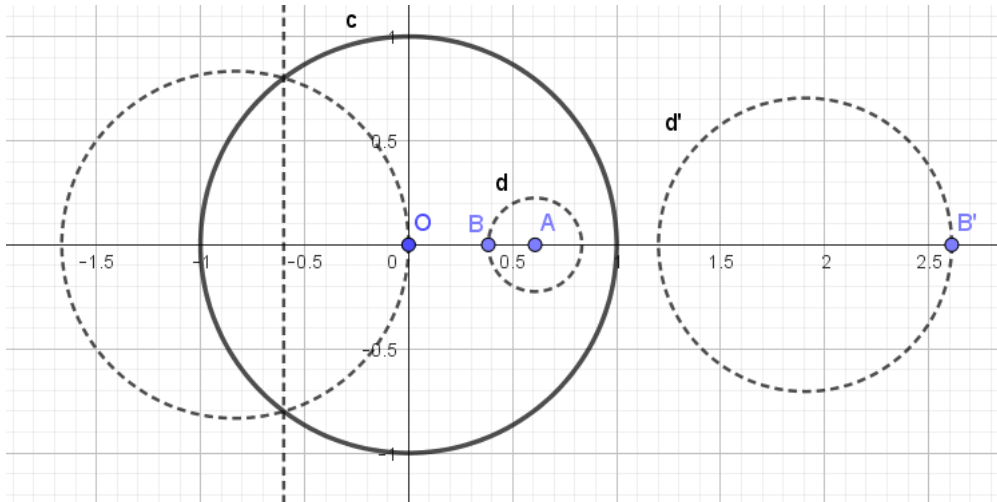
Daarmee is dus een lijnstuk van lengte $\frac{2}{\pi}$ bekend en is een lijnstuk van lengte π te construeren.

Hiermee is dan meteen een oplossing voor de kwadratuur van de cirkel te vinden.

⁸ Hippas van Elis (Athene, ca. 450 – ca. 400 BC)

P25 Inversie bekeken

De afbeelding 'inversie' is conform maar niet isometrisch. Eigenschappen van die afbeelding zijn synthetisch eenvoudig te vinden maar ook met methoden van de analytische meetkunde. In figuur 1 is het midden van de inversiecirkel punt $O(0,0)$ en de straal gelijk aan 1.



figuur 1

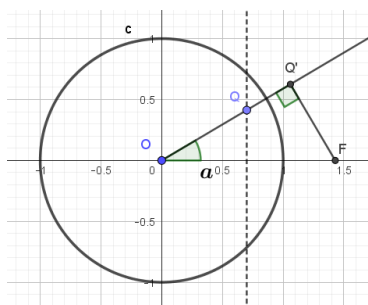
De afbeelding is gedefinieerd als volgt: $I_c(P) = P'$ met $|OP'| \cdot |OP| = 1$.

Een punt $P(x, y)$ heeft dan als beeld $P'(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. [1]

In poolcoördinaten heeft $P(r, \alpha)$ als beeld $P'(\frac{1}{r}, \alpha)$. [2]

Eigenschappen:

- Lijn door O heeft als beeld dezelfde lijn door O. Dat is eenvoudig met [2] in te zien. Punten binnen de inversiecirkel worden buiten de inversiecirkel afgebeeld en vice versa.
- Lijn niet door O heeft als beeld een cirkel wel door O:



figuur 2

Gebruik weer [2]:

$Q(r, \alpha) = Q(\frac{a}{\cos(\alpha)}, \alpha)$ als Q op lijn met verg. $x = a$.

$Q'(\frac{1}{r}, \alpha) = Q'(\frac{\cos(\alpha)}{a}, \alpha)$.

Merk op in de figuur 2 hiernaast:

$\frac{|OQ'|}{|OF|} = \cos(\alpha)$. Dus $|OF| = \frac{1}{a}$, bij elke waarde van α .

Blijkbaar ligt Q' op cirkel met middellijn OF.

- Een cirkel door O heeft als beeld een lijn niet door O. De omgekeerde weg van het betoog hierboven volgen.
- Een cirkel niet door O heeft als beeld een cirkel niet door O. Dat is met deze aanpak lastiger. Zie hierna.
- Vanwege veel notatie-gedoe volgt één redenering voor het beeld van een cirkel niet door O. Neem als voorbeeld een cirkel d met middelpunt $M(3,0)$ en straal gelijk aan 1. Noteer de cirkel d complex: $|z - 3| = 1$. [3]

Complex geschreven en gezien is de inversie de afbeelding: $I_c(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. ($\frac{1}{z}$ geconjugueerd!)

De cirkel d snijdt de reële as in $A(2,0)$ en $B(4,0)$.

Er volgt: $A'(\frac{1}{2}, 0)$ en $B'(\frac{1}{4}, 0)$.

Het punt midden tussen deze twee: $N(\frac{3}{8}, 0)$. En $|NA'| = |NB'| = \frac{1}{8}$.

Bewering: Het beeld van d is de cirkel met vergelijking: $|w - \frac{3}{8}| = \frac{1}{8}$.

- Bewijs: Bij inversie geldt dat $w = \frac{1}{\bar{z}}$

$$|w - \frac{3}{8}| = (\frac{1}{\bar{z}} - \frac{3}{8})(\frac{1}{z} - \frac{3}{8}) = \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{3}{8}(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}) + \frac{9}{64} = \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{3}{8} \frac{1}{z\bar{z}} (z + \bar{z}) + \frac{9}{64} = [4].$$

Uit [3] volgt: $3(z + \bar{z}) = z\bar{z} + 8$.

$$\text{Dus: } [4] = \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{1}{8} \frac{1}{z\bar{z}} (z\bar{z} + 8) + \frac{9}{64} = \frac{1}{8}.$$

- In het algemeen:

Cirkel $|z - p| = q$ wordt afgebeeld op cirkel $|w - \frac{p}{p^2 - q^2}| = \frac{q}{p^2 - q^2}$.

NB: $p \neq q$ want de cirkel gaat niet door O.

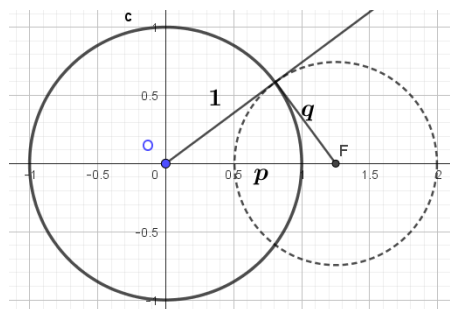
- Het middelpunt van een cirkel niet door O wordt NIET afgebeeld op het middelpunt van de beeldcirkel. Zie figuur 1. Met $A(p, 0)$ volgt: $A'(\frac{1}{p}, 0)$. Noem de straal t.

Met $B(p - t, 0)$ en $C(p + t, 0)$ volgt: $B'(\frac{1}{p-t}, 0)$ en $C'(\frac{1}{p+t}, 0)$.

Midden van $B'C'$ is punt $N(\frac{p}{p^2 + t^2}, 0) \neq A'(\frac{1}{p}, 0)$ voor $t \neq 0$.

Er zijn situaties dat een cirkel op zichzelf wordt afgebeeld. Er moet dan gelden: $p^2 - q^2 = 1$. Dan snijdt de cirkel de inversiecirkel loodrecht. Zie figuur 3.

De inversiecirkel zelf is ook invariant onder inversie.



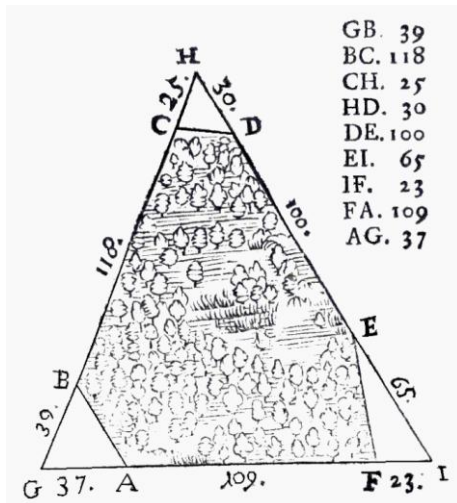
figuur 3

A6 Ontwikkeling van analytische meetkunde 6

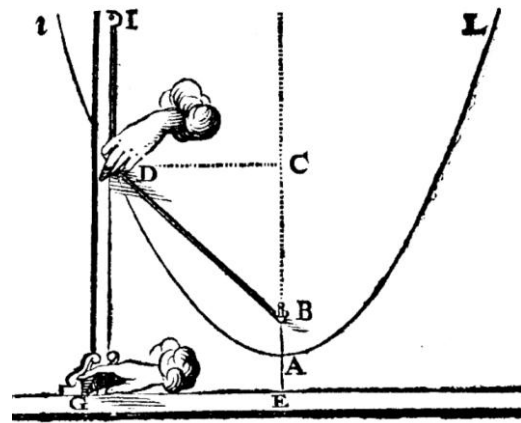
De acceptatie van de nieuwe methode gaat niet snel. Boyer verklaart dat door te verwijzen naar de wiskundigen in de 17^e en 18^e eeuw die de klassieke meetkunde van de oudheid overwaarden. Maar hij wijst ook op andere redenen: voor Fermat is wiskunde een hobby en hij publiceert te weinig en Descartes biedt zijn werk niet goed geordend, niet systematisch en onvolledig aan. Typerend vindt Boyle de opmerking van Descartes in *La Geometrie* (p.301):

“Maar ik zal me hier niet ophouden dit tot in de kleinste details verder uit te leggen, omdat ik u het genoegen zou onthouden het zelf te leren en het nut om uw geest te ontwikkelen door uzelf te oefenen, wat naar mijn oordeel het belangrijkste is dat men kan ontleen aan deze wetenschap...”

In Nederland zorgen publicaties van Van Schooten voor popularisering van *La Géometrie* met aanvullende bewijzen, algebraïsch meetkundige problemen en constructies. Zie figuur 1: daar wordt de oppervlakte van de zeshoek gevraagd. In figuur 2 staat een parabolograaf...



figuur 1



figuur 2

In Engeland zorgt John Wallis (1616-1703) voor popularisering door in zijn eigen werk de methode te gebruiken. Daarbij zijn coördinaten gewoon getallen en geen lijnstukken meer en verhoudingen zijn ook ‘gewoon’ rekenkundige concepten. Bij hem worden kegelsneden niet meer stereografisch (snede op kegel) of kinematisch (locus van snijdende lijnen) ingevoerd maar puur als vergelijkingen van graad 2.

De studie naar infinitesimaalrekening en calculus neemt een grote vlucht en overschaduwde de analytische meetkunde. Onder andere voor de architectuur en de kunst is de opbloei en ontwikkeling van de projectieve meetkunde van belang.

In de 19^e eeuw gaat de ontwikkeling van analytische meetkunde voort en zijn algebraïsche aanpakken gemeengoed geworden. Overigens komt dan pas de naam ‘analytische meetkunde’ in zwang en wordt de kern van de elementaire analytische meetkunde, zoals wij die nu kennen, duidelijk zichtbaar:

(1) afleiding meetkundige plaatsen en (2) studie van lineaire en kwadratische vergelijkingen maar nu ook (3) afleiding van formules incl. toepassingen en (4) het plotten van krommen van hogere graad.

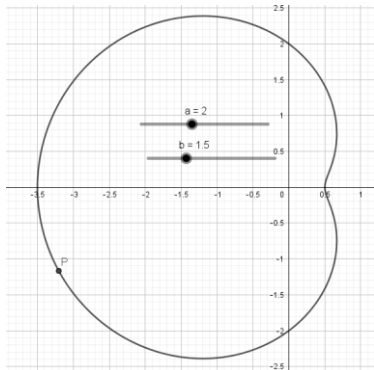
Wordt vervolgd.

P26 Inversie van slaklijnen

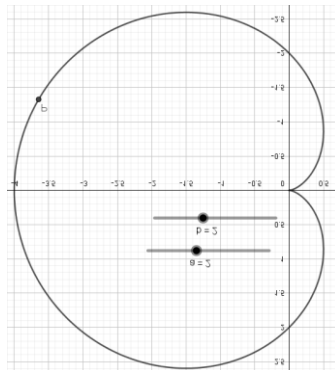
Een slaklijn van Pascal heeft in poolcoördinaten een eenvoudig voorschrift:

$r(\theta) = a - b \cdot \cos(\theta)$. De getallen a en b zijn positief.

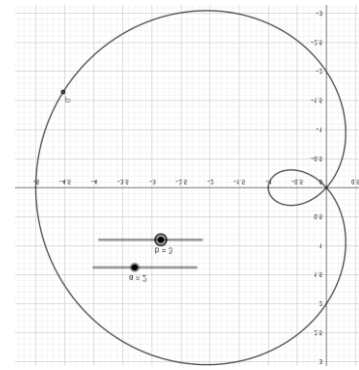
In figuur 1 zijn drie situaties getekend: $a > b$; $a = b$; $a < b$.



figuur 1a



figuur 1b

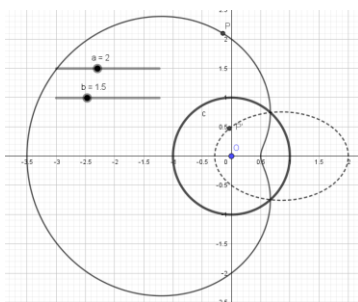


figuur 1c

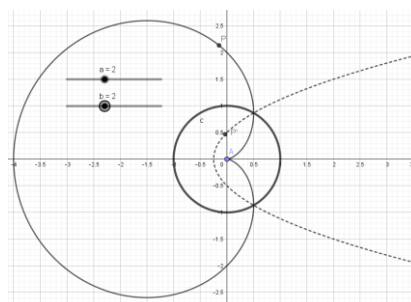
De figuur met $a=b$ wordt een *cardioïde* (hartkromme) genoemd.

Wordt een inversie op deze kromme toegepast, dan ontstaan bekende krommen.

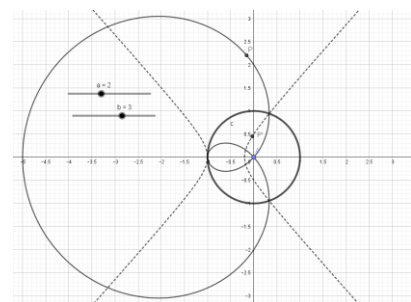
Zie figuur 2: er ontstaan kegelsneden.



figuur 2a



figuur 2b



Figuur 2c

Dit wordt duidelijk bij inversie en herschrijving naar rechthoekige coördinaten.

- Begin met $r = a - b \cdot \cos(\theta)$.
- Dan volgt: $r' = \frac{1}{a - b \cdot \cos(\theta)}$.
- Met $(x, y) = (r' \cdot \cos(\theta), r' \cdot \sin(\theta))$ volgt: $r' = \frac{1}{a - b \left(\frac{x}{r'}\right)}$.
- Uitgewerkt wordt dit: $a\sqrt{x^2 + y^2} - bx = 1$.
- En uiteindelijk: $(a^2 - b^2)x^2 - 2bx + a^2y^2 - 1 = 0$.
- De discriminant hiervan: $D = 4a^2(b^2 - a^2)$.
- Conclusie1: Als $D > 0$ dan $a < b$ en is een hyperbool ontstaan.
- Conclusie2: Als $D < 0$ dan $a > b$ en is een ellips ontstaan.
- Conclusie3: Als $D = 0$ dan $a = b$ en is een parabool ontstaan.

Voor $a < b$ is nog meer af te leiden.

Voor de asymptoten geldt dat die 'raken' aan de hyperbool en dan geldt ook: $r' \rightarrow \infty$.

Dat treedt op indien: $a - b \cdot \cos(\theta) \rightarrow 0$.

Daarmee is de richtingshoek en dus de richtingscoëfficiënt van de asymptoot bekend.

$$\tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}. \text{ Dus de richtingscoëfficiënten zijn: } \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}.$$

Bij een orthogonale hyperbool staan de asymptoten loodrecht op elkaar.

$$\text{Gevolg: } -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = -1.$$

Als $b = a\sqrt{2}$ dan is er dus sprake van een orthogonale hyperbool.

Bij inversie betekent dat, dat de slaklijn te $O(0,0)$ zichzelf loodrecht snijdt.

De richtingscoëfficiënten zijn dus bekend. De toppen van de hyperbool ook.

Hiermee zijn de vergelijkingen van de asymptoten te vinden.

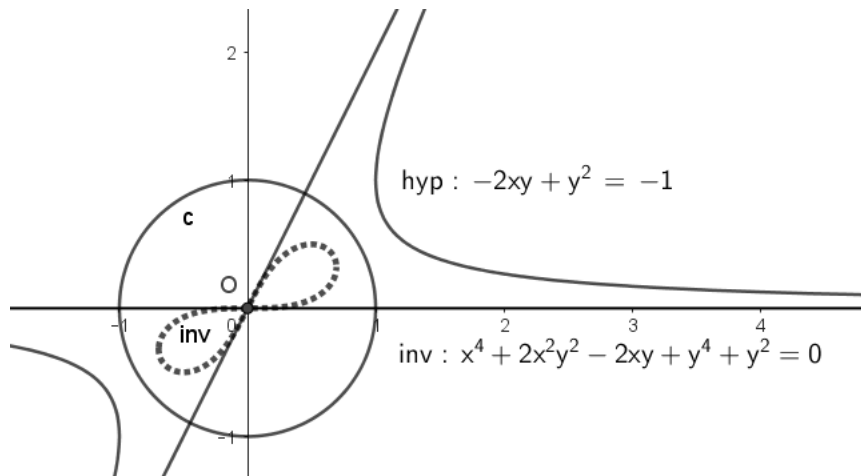
Omgekeerd kunnen ook bijzondere krommen ontstaan. We bekijken één voorbeeld.

Als lijn k met vergelijking $y = 0$ en lijn m met vergelijking $y = 2x$ de asymptoten van een hyperbool

zijn, dan hoort daar bij een keuze van $a \neq 0$ een hyperbool bij met vergelijking: $y(y - 2x) = a$.

In figuur 3 is $a = -1$ gekozen.

Na inversie in de eenheidscirkel ontstaat een soort lemniscaat. Die is in de figuur aangegeven met 'inv'. Variatie van a geeft weer andere krommen.



figuur 3

Poolcoördinaten zijn nu ook handig.

De poolvergelijking van de hyperbool is: $r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta) - \sin^2(\theta)}$.

De poolvergelijking van de lemniscaat volgt nu eenvoudig.

P27 Hulp bij meetkundige puzzels

Soms kan analytische meetkunde helpen bij entertainment.

Als voorbeeld dienen een paar puzzels van *Pythagorea*⁹. Zie de figuren 1 en 2.

Gevraagd is hier een L(iniaal)-constructie van de raaklijnen uit A aan de cirkel. Kies $M(0,0)$.

Met voor de cirkel $(M, \sqrt{2})$ de vergelijking

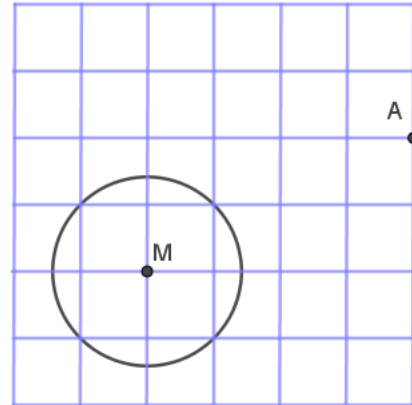
$x^2 + y^2 = 2$ volgt voor de poollijn van $A(4,2)$:

$4x + 2y = 2$. De richtingscoëfficiënt hiervan is -2 .

Noem de raakpunten P en Q.

Dan volgt: $P(1, -1)$ ligt op die poollijn en op de cirkel dus P is bekend.

De poollijn is nu eenvoudig te tekenen door P en snijdt de cirkel in Q...



figuur 1

In het volgende voorbeeld is enig gebruik van vergelijkingen handig.

Gevraagd was hier een L-constructie van de raaklijn in A aan de cirkel, allebei gegeven.

Met $M(0,0)$ en cirkel $x^2 + y^2 = 4$ volgt voor de raaklijn te $A(1, \sqrt{3})$: $x + y\sqrt{3} = 4$.

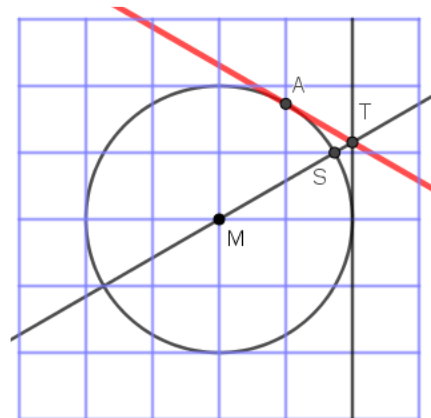
De lijn met vergelijking $x = 2$ snijdt de raaklijn in $T(2, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

De lijn MT heeft vergelijking: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Die lijn snijdt de cirkel in $X(\sqrt{3}, 1)$.

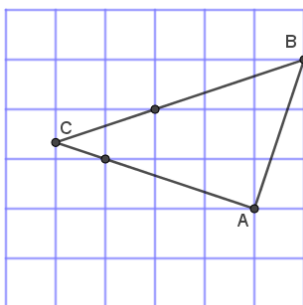
Maar... punt S ligt op de cirkel en op de lijn met vergelijking $y = 1$. Dus $X=S$.

Daarmee is vanuit S dus omgekeerd T te vinden.



figuur 2

Gebruikmakend van de formule van afstand en gebruik bij bissectrices kan bijvoorbeeld de volgende puzzel opgelost worden, zie figuur 3.



figuur 3

Gevraagd is hier een L-constructie van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

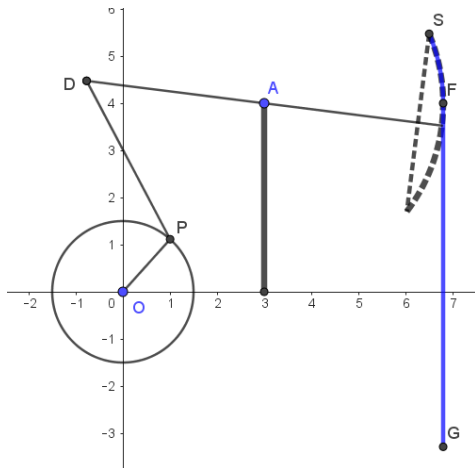
Overigens is met wat logisch redeneren deze puzzel ook goed te doen.

⁹ *Pythagorea* is een app in Google Play en de Apple Store.

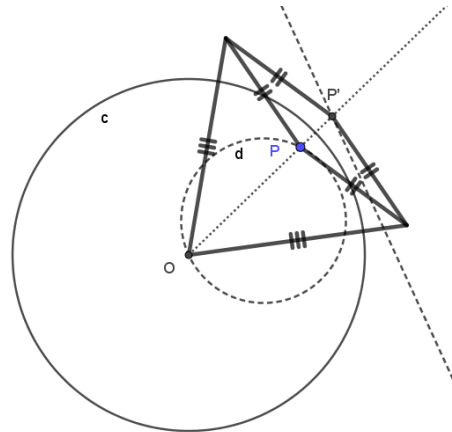
P28 Stangenmeetkunde

De 19^e eeuw is de eeuw van grote industriële ontwikkelingen. De stoommachine van Watt en de locomotief zijn daarvan voorbeelden. Een van de problemen die opgelost moet worden is hoe een draaiende beweging omgezet kan worden in een rechtlijnige beweging en omgekeerd.

In de bekende ja-knikker is een oplossing daarvoor te zien.



figuur 1

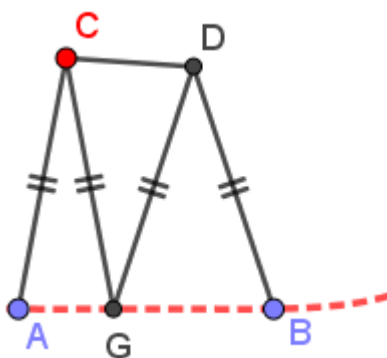


figuur 2

In figuur 1 draait punt P om O. Via de stangen PD en DA, met A vast, wordt die beweging overgebracht op het (gestippelde) 'hoofd' waar een kabel over loopt. Die kabel heeft een vaste lengte SG. Het eindpunt G van die kabel gaat op en neer: als SF groter wordt, dan wordt FG korter... G beweegt in een rechte lijn, want GF raakt aan de cirkelboog met A als middelpunt.

Met het inversieapparaat, zie figuur 2, is het mogelijk vanuit een cirkel een lijn te construeren en omgekeerd: P op de cirkel d door O heeft als inverse in cirkel c punt P' op een lijn niet door O.

Een poging om met een stangenobject een rechte lijn te construeren kan ook wel eens mislukken. Zie figuur 3. Richard Roberts (1789-1864) ontwikkelt zijn *linkagemechanism* en meent dat punt G een rechte lijn beschrijft...¹⁰



figuur 3

A en B zijn vast gekozen.

Er geldt: $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. [*]

Door C te bewegen beschrijft G de stippelkromme.

Er zijn situaties met G op A of op B vallend.

Als CD evenwijdig is aan AB, dan ligt G in het midden van lijnstuk AB. Het vermoeden ontstaat: de stippelkromme is een lijn tussen A en B. Dat is niet zo...

Als G in figuur 3 op lijn AB zou liggen, dan volgt met C' en D' voetpunten van hoogtelijnen: $|C'D'| = \frac{1}{2}|AB|$.

Dat geeft een tegenspraak want in de figuur geldt [*] terwijl CC'D'D geen rechthoek is in de stand van figuur 3.

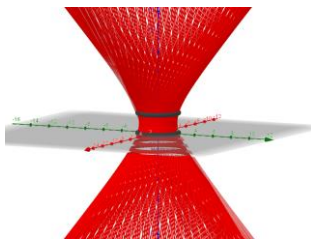
¹⁰ Bron: *Stangenmeetkunde VakantieCursus 2021*, Rainer Kaenders.

P29 In de ruimte

Uiteraard is analytische meetkunde ook 3D mogelijk.

Het vinden van een meetkundige plaats kan gaan over punten maar ook over lijnen. Een voorbeeld is in figuur 1 te zien.

Het spoor van de lijn door $A(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$ en $B(\cos(\alpha + \varepsilon), \sin(\alpha + \varepsilon), 1)$ bij variatie van α geeft een oppervlak, waarbij vooraf ε vast gekozen dient te worden.



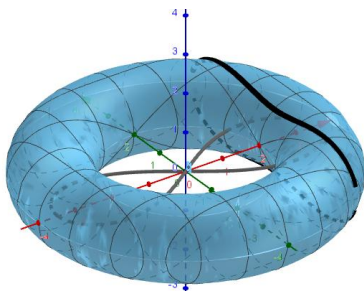
figuur 1

Via de vectorvoorstelling van de lijn door A en B en na wegwerking van de parameters ontstaat de algemene vergelijking van dit oppervlak:

$$x^2 + y^2 = 1 - 2z + 2z^2 + 2z(1 - z)\cos(\varepsilon).$$

Vergelijking cilinder ($\varepsilon = 0^\circ$): $x^2 + y^2 = 1$.

Vergelijking kegel ($\varepsilon = 180^\circ$): $x^2 + y^2 = (2z - 1)^2$.



figuur 2

Soms treden bekende 2D-krommen als doorsneden op. Bij wenteling van een cirkel om één van de assen ontstaat een torus. Zie figuur 2.

Een vergelijking is redelijk eenvoudig te vinden:

$$z^2 = r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2$$

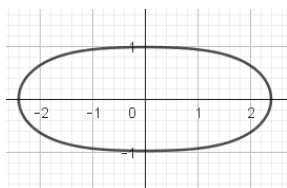
r de straal van de kleine cirkel met middelpunt S , R is de straal van de cirkel die S om de z -as beschrijft.

Een parametervoorstelling zou kunnen zijn:

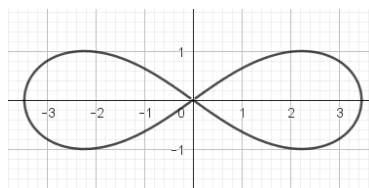
$$(x, y, z) = ((R + r \cdot \cos(\alpha)) \cos(\beta), (R + r \cdot \cos(\alpha)) \sin(\beta), r \cdot \sin(\alpha)).$$

De doorsnijding met een vlak evenwijdig aan de z -as geeft verschillende 2D-krommen.

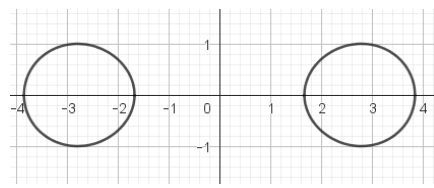
In figuur 3abc geldt: $(R, r) = (3, 1)$.



figuur 3a



figuur 3b

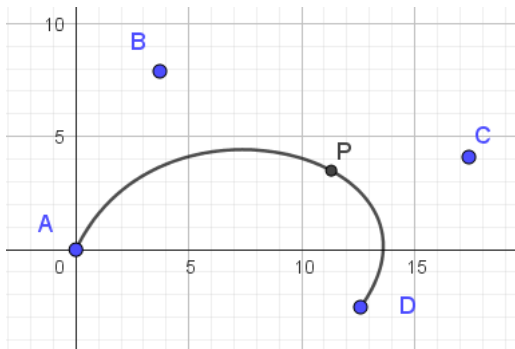


figuur 3c

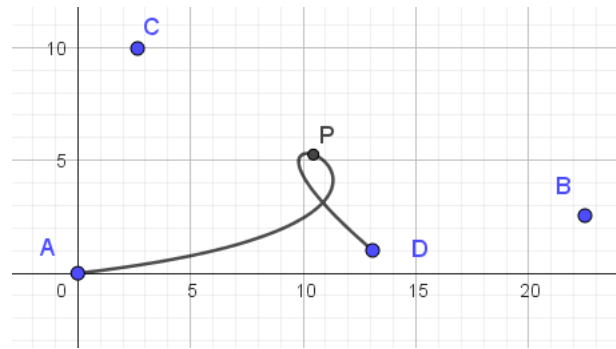
Figuur 3b is een lemniscaat. Cirkels kunnen ontstaan als doorsnijding maar dat geeft de doorsnijding in figuur 3c niet.

P30 Bézierkrommen

In de wereld van animaties wordt veel wiskunde gebruikt. De krommen van Bézier zijn daarvan een voorbeeld. Daarmee kan met weinig vastlegging een gladde kromme gemaakt én snel gevarieerd worden. Zie figuren 1a en 1b.



figuur 1a

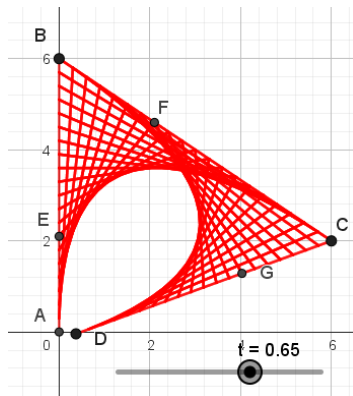


figuur 1b

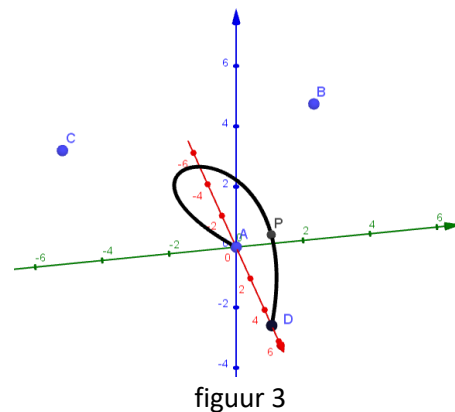
Punt P beschrijft een kromme vastgelegd door een parametrisering met parameter t en de te variëren punten A, B, C en D. Lees voor A zijn coördinatenpaar (vector) en analoog voor B, C en D.
 $P(t) = (1 - t)^3 A + 3t(1 - t)^2 B + 3t^2(1 - t)C + t^3 D; t \in [0,1]$.

Pierre Bézier (1910-1999) was een ingenieur en hield zich o.a. bezig met *Computer-Aided-Design*. De krommen worden gebruikt om gladde krommen te tekenen, voor TrueType-lettertypen en digitale animatie. In figuur 1ab gaat het om derdegraads-krommen maar andere graden zijn ook mogelijk.

Kunstige tekeningen zijn er ook mee te maken, zie figuur 2, en in figuur 3 ontstaat een kromme die een vloeiende beweging in 3D laat zien, bij variatie van t .



figuur 2



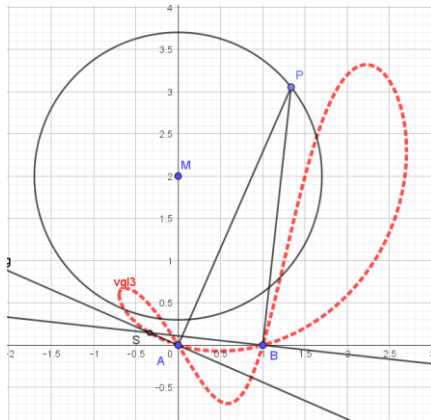
figuur 3

In figuur 2 geldt voor punt E: $E(t) = tA + (1 - t)B; t \in [0,1]$. Analoog voor F en G. De figuur ontstaat door de lijnstukken EF en FG te tekenen, waarbij t sprongen maakt.

In figuur 3 is de parametrisering van P als onder figuur 1 gebruikt maar ontstaat een 3D-kromme.

A7 Ontwikkeling van analytische meetkunde 7

Newton (1643-1727) maakt studie van complexe krommen van hogere graad. Zie voor een voorbeeld figuur 1.



figuur 1

Punten A en B zijn vast gekozen.

Punt P beweegt over een kromme k, hier de cirkel $(M(0,p);q)$.

Op de lijnen AP en BP zijn lijnen onder een vaste hoek, hier 90° , getekend. Hun snijpunt S geeft een vierdegraads

kromme met vergelijking:

$$y^2(q^2 - (x - 1)^2) = (x(x - 1) - py)^2.$$

Dit is een kinematisch ontstane kromme.

Newton gebruikt ook andere kegelsneden als kromme k.

Als k een lijn is niet door A en B, dan ontstaat een kegelsnede.

Het gebruik van poolcoördinaten is geaccepteerd en daarmee zijn goed kegelsneden en spiralen te beschrijven.

Euler (1707-1783) maakt o.a. studie van 3D-objecten en beschrijvingen daarvan in coördinaten (kegel, bol, cilinder, torus,...). Analytische meetkunde gaat nu meer over classificatie van krommen (2D of 3D) en hun vergelijkingen.

In de 19^e eeuw komt niet-Euclidische meetkunde¹¹, differentiaalmeetkunde, beschrijvende meetkunde met enige projectieleer op en het is een gouden periode voor de meetkunde.

Studie van (niet-)algebraïsche krommen (vb. $y = x^{\sqrt{2}}$) is intensief en langzaam komt lineaire algebra binnen met gebruik van (raak-)vectoren bij krommen. Verder garandeert het Cantor-Dedekindt-axioma de 1-1-koppeling tussen rechte lijn en \mathbb{R} en bijgevolg ook tussen vlak/ruimte en $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$: gebruik van coördinaten is dus correct om meetkundige objecten mee te beschrijven.

Bijzonder is nog dat Joseph Gergonne (1771-1859), bekend van studie in projectieve meetkunde, met een puur meetkundig analytische methode oplossingen vindt van het aloude raakcirkelprobleem CCC van Apollonius. De meetkunde van de oude Grieken blijft blijkbaar inspireren.

In de 20^e eeuw gaat onderzoek in meetkunde steeds meer over elliptische krommen en varianten daarop en worden algebra en getaltheorie (cryptografie) leidend.

Het vinden van geheeltallige oplossingen van een vergelijking als $y^2 = x^3 + 17$ of $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3$) is dan een doel. Met onderzoek over die laatste uitdrukking wordt eindelijk een vermoeden van Fermat bewezen...

Slotopmerking: De meetkundig algebraïsche aanpak in het huidige vo-onderwijs gaat niet over de ingewikkelde theorieën hierboven genoemd. Het vinden van *loci* (2D of 3D), formules en het plotten van krommen van lage graad met of zonder vectoren is de kern.

===

¹¹ Zie o.a. Muijers, F. (2022) *Lessen in voortgezette meetkunde*.